II skyrius. ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

1. ATSITIKTINIO DYDŽIO SĄVOKA

Atsitiktinio įvykio, tikimybės ir atsitiktinio dydžio sąvokos yra svarbiausios tikimybių teorijoje. Sakome, kad dydis yra atsitiktinis, jei jo reikšmės priklauso nuo atsitiktinio eksperimento rezultatų. Tiksliau kalbant, atsitiktinis dydis yra elementariųjų įvykių funkcija. Paaiškinsime šią sąvoką pavyzdžiais.

1 pavyzdys. Metame lošimo kauliuką. Atsiverčia viena jo sienelė, pažymėta kuriuo nors akučių skaičiumi. Akučių skaičius yra atsitiktinis dydis.

2 pavyzdys. Pirkome piniginės loterijos bilietą. Suma pinigų, kurią bilietas išloš eiliniame tiraže, yra atsitiktinis dydis.

3 pavyzdys. Iš kosmoso į Žemės paviršių krinta įvairios dalelės. Skaičius dalelių, patenkančių į apibrėžtą Žemės paviršiaus plotą per apibrėžtą laiko tarpą, yra atsitiktinis dydis.

4 pavyzdys. Skaičius radioaktyviosios medžiagos atomų, suskylančių per apibrėžtą laiko tarpą, yra atsitiktinis dydis.

5 pavyzdys. Matuojame atstumą tarp dviejų Žemės paviršiaus taškų. Matavimo prietaisus veikia daugybė atsitiktinių faktorių: temperatūros svyravimai, virpesiai, vėjas ir t. t. Matavimo rezultatas yra atsitiktinis dydis.

Norint nusakyti atsitiktinį dydį, reikia žinoti jo reikšmes. Bet to nepakanka – dar reikia apibūdinti, kaip dažnai tos reikšmės įgyjamos.

1 pavyzdyje atsitiktinis dydis įgyja reikšmes 1, 2, ..., 6. Kiekvieną tų reikšmių jis įgyja su tikimybe 1/6. Panašiai galime apibūdinti ir 2, 3, 4 pavyzdžių atsitiktinius dydžius. Apskritai, jei atsitiktinis dydis įgyja baigtinę arba skaičią aibę reikšmių, tai, norint jį apibūdinti, pakanka nurodyti tas reikšmes ir jų tikimybes. Tačiau 5 pavyzdžio atsitiktinį dydį taip apibūdinti sunku. Jo reikšmių aibė (bent iš principo) gali būti neskaiti. Šiuo atveju galime nusakyti tikimybes, su kuriomis tos reikšmės priklauso kurio nors tipo skaičių aibėms (pavyzdžiui, intervalams). Pastarasis būdas yra bendresnis. Jis tinka ir kitų pavyzdžių atsitiktiniams dydžiams.

Dabar atsitiktinius dydžius apibrėšime matematiškai. Kaip jau minėjome pradžioje ir matėme iš pavyzdžių, atsitiktiniai dydžiai yra elementariųjų įvykių funkcijos, įgyjančios realiąsias reikšmes. Tačiau ne kiekviena funkcija mums tinka. Reikia, kad ji turėtų pakankamai geras analizines savybes. Tų funkcijų klasė turėtų būti uždara aritmetinių operacijų ir perėjimo prie ribos operacijos atžvilgiu. Minėtas sąlygas tenkina vadinamosios mačios funkcijos.

Tarkime, jog turime tikimybinę erdvę $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$. Kiekviena $\mathcal{A}$ mati funkcija $X : \Omega \to R$ yra vadinama *atsitiktiniu dydžiu*. Kitais žodžiais, atsitiktinis dydis X yra funkcija, apibrėžta elementariųjų įvykių aibėje Ω, įgyjanti realiąsias reikšmes ir turinti savybę, kad pirmavaizdis $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, kokia bebūtų Borelio[1] aibė B.

Kadangi intervalų sistema $(-\infty, x)$, $x \in R$, generuoja Borelio aibių σ algebrą, tai funkcija $X : \Omega \to R$ yra atsitiktinis dydis tada ir tik tada, kai $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$, koks bebūtų $x \in R$ (žr. V.7.1 teoremos išvadą).

6 pavyzdys. Metame simetrišką monetą. Pažymėkime X herbo atsivertimų skaičių. Šiam eksperimentui imkime tikimybinę erdvę, kurios elementariųjų įvykių aibė yra $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$, atsitiktinių įvykių aibė – $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{\omega_0\}, \{\omega_1\}, \Omega\}$, o tikimybinis matas aprašytas lygybėmis $P(\{\omega_0\}) = P(\{\omega_1\}) = 1/2$. Dydį X apibrėžkime šitaip:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \omega = \omega_1, \\ 0, & \text{kai } \omega = \omega_0. \end{cases}$$

Kadangi $\mathcal{A}$ yra sudaryta iš visų Ω poaibių, tai kiekviena realioji funkcija, apibrėžta aibėje Ω, taigi ir X, yra mati.

7 pavyzdys. Turime paprastą Bernulio schemą iš n eksperimentų. Atlikus kiekvieną eksperimentą, įvyksta įvykis ω_1 su tikimybe p arba jam priešingas įvykis ω_0 su tikimybe $q = 1 - p$. Tarkime, kad X_n yra įvykių ω_1 skaičius, atlikus n eksperimentų. Bernulio schemos tikimybinį matematinį modelį jau aprašėme I.14 skyrelyje. Elementarieji įvykiai bus $(\omega_{\varepsilon_1}, ..., \omega_{\varepsilon_n})$; čia ε_k įgyja reikšmes 0 arba 1. Sakysime, kad funkcija

$$X_n\big((\omega_{\varepsilon_1}, ..., \omega_{\varepsilon_n})\big)$$

yra lygi $\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n$. Ji yra mati, nes visos elementariųjų įvykių aibės yra įvykiai.

Atsitiktinių dydžių teorijoje praverčia dar šitokia sąvoka. Tarkime, kad X yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$. Pažymėkime $\mathcal{A}_X$ aibių $\{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}\}$ sistemą. Lengva įsitikinti, kad ta sistema yra aibių σ algebra. Ji dar žymima $\sigma(X)$ ir vadinama *σ algebra, generuota atsitiktinio dydžio X*. Vietoj tikimybinės erdvės $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ galime nagrinėti tikimybinę erdvę $\{\Omega, \mathcal{A}_X, P\}$. Jos visiškai pakanka atsitiktiniam dydžiui X apibūdinti.

Kadangi atsitiktiniai dydžiai yra mačios funkcijos, tai jie turi ir mačių funkcijų savybes (žr. V.7 skyrelį). Keletą jų paminėsime. Kiekviena konstanta yra atsitiktinis dydis. Jei c yra konstanta, o X – atsitiktinis dydis, tai $X + c$, cX, $|X|$, X^2, $1/X$, jei tik $X \neq 0$, yra atsitiktiniai dydžiai. Tai yra specialūs tokios teoremos atvejai.

1 teorema. *Jei X yra atsitiktinis dydis, o $\varphi : R \to R$ – Borelio funkcija, tai funkcija Y, aprašyta lygybe $Y(\omega) = \varphi\big(X(\omega)\big)$, yra taip pat atsitiktinis dydis.*

[1] Emile Borel (1871–1956) – prancūzų matematikas.

Į r o d y m a s. Reikia įrodyti, kad $Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, kokia bebūtų Borelio aibė B. Tai išplaukia iš lygybių (žr. V.7)

$$Y^{-1}(B) = \{\omega : Y(\omega) \in B\} = \{\omega : \varphi\big(X(\omega)\big) \in B\} = \\ = \{\omega : X(\omega) \in \varphi^{-1}(B)\} \in \mathcal{A},$$

nes $\varphi^{-1}(B)$ yra Borelio aibė. □

Čia praverčia ir toks teiginys.

2 teorema. *Jei funkcija $\psi : R \to R$ yra tolydi, tai ji yra Borelio funkcija.*

Į r o d y m a s. Remiantis V.7.1 teorema, pakanka įrodyti, kad aibė $A_y = \{x \in R,\ \psi(x) < y\}$ yra Borelio aibė, koks bebūtų realus y. Kadangi funkcija ψ yra tolydi, tai, paėmę bet kurį $x \in A_y$, galime rasti atvirą intervalą I_x, kurio visuose taškuose teisinga nelygybė $\psi(u) < y$. Todėl

$$A_y = \bigcup_{x \in A_y} I_x.$$

Iš čia matome, kad aibė A_y yra atvira. Tačiau atvira aibė yra baigtinės arba skaičios atvirų intervalų sistemos sąjunga (žr. [18], II.7 skyrelį). Todėl ji yra Borelio aibė. □

Iš mačiųjų funkcijų savybių išplaukia ir tokie teiginiai. Jei X ir Y yra atsitiktiniai dydžiai, tai $X+Y,\ X-Y,\ XY$ ir X/Y, kai $Y \neq 0$, yra atsitiktiniai dydžiai.

Jei X_n $(n = 1, 2, ...)$ yra atsitiktiniai dydžiai, tai

$$\inf_n X_n,\ \sup_n X_n,\ \liminf_{n\to\infty} X_n,\ \limsup_{n\to\infty} X_n$$

ir $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$, jei riba egzistuoja, yra atsitiktiniai dydžiai, jei tik visos tos funkcijos yra baigtinės.

Paminėsime dar porą įdomių teoremų.

3 teorema. *Sakykime, $X_1, X_2, ...$ yra atsitiktinių dydžių seka. Pažymėkime A aibę tų elementariųjų įvykių ω, kada seka $X_1(\omega), X_2(\omega), ...$ konverguoja. Tada aibė A yra mati, t. y. atsitiktinis įvykis.*

Į r o d y m a s. Seka $X_l(\omega)$ pagal Koši kriterijų konverguoja tada ir tik tada, kai, paėmus bet kurį k, galima rasti tokį n, kad būtų

$$|X_r(\omega) - X_s(\omega)| < 1/k,$$

kai tik $r \geq n,\ s \geq n$. Iš čia išplaukia lygybė

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{r=n}^{\infty} \bigcap_{s=n}^{\infty} \{\omega : |X_r(\omega) - X_s(\omega)| < 1/k\},$$

iš kurios matome, kad teorema yra teisinga. □

Iš pastarosios teoremos matome, kad galima kalbėti apie atsitiktinių dydžių sekos konvergavimo tikimybę.

4 teorema. *Jei $X_1, X_2, \ldots$ yra atsitiktinių dydžių seka ir A – aibė tų elementriųjų įvykių ω, kada seka $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots$ konverguoja, tai funkcija*

$$X(\omega) = \begin{cases} lim_{n\to\infty} X_n(\omega), & kai\ \omega \in A, \\ 0, & kai\ \omega \in A^c, \end{cases}$$

yra atsitiktinis dydis.

Į r o d y m a s. Reikia įrodyti, kad aibė

$$\{\omega : X(\omega) < x\} = \big(A \cap \{\omega : X(\omega) < x\}\big) \cup \big(A^c \cap \{\omega : X(\omega) < x\}\big)$$

yra mati, koks bebūtų realusis x. Dešinėje lygybės pusėje turime dviejų aibių sąjungą. Antroji aibė yra $\varnothing$, kai $x \le 0$, arba A^c, kai $x > 0$. Vadinasi, ji yra mati. Lieka įrodyti, kad ir pirmoji aibė yra mati.

Nelygybė $X(\omega) < x$ yra ekvivalenti natūraliųjų skaičių k ir n egzistavimui su sąlyga, kad $X_r(\omega) < x - 1/k$, kai $r \ge n$. Todėl

$$A \cap \{\omega : X(\omega) < x\} = A \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{r=n}^{\infty} \{\omega : X_r(\omega) < x - 1/k\}\Big).$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad kairėje lygybės pusėje esanti aibė yra mati. □

Šioje teoremoje funkciją X aibėje A^c, kurioje seka $X_n(\omega)$ nekonverguoja, laikėme lygia 0. Iš įrodymo matome, kad ji gali būti lygi bet kuriai kitai konstantai arba net ir ne konstantai, – pakanka tik pareikalauti, kad aibė $\{\omega : X(\omega) < x,\ \omega \in A^c\}$ kiekvienam $x \in R$ būtų mati.

2. ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ PASISKIRSTYMO FUNKCIJOS IR JŲ SAVYBĖS

Atsitiktinio dydžio X reikšmių pasiskirstymą visiškai nusako tikimybės $P(\omega : X(\omega) \in B)$, $B \in \mathcal{B}$. Tačiau galime jį paprasčiau apibūdinti, nagrinėdami tik specialių Borelio aibių – intervalų $(-\infty, x)$ tikimybes. Tam reikalui įvesime atsitiktinio dydžio X *pasiskirstymo funkciją* F_x, apibrėžtą visiems realiesiems x lygybėmis

$$F_X(x) = P\big(\omega : X(\omega) < x\big) = P(X < x).$$

Dažnai rašysime tiesiog $F(x)$, kai bus aišku, apie kokį atsitiktinį dydį kalbama.

Kartais pasiskirstymo funkcija apibrėžiama ir kiek kitaip: $F_X(x) = P(X \le x)$.

V.6 skyrelyje parodyta, kad pasiskirstymo funkcija visiškai nusako atsitiktinio dydžio reikšmių pasiskirstymą.

1 pavyzdys. 1 skyrelio 6 pavyzdžio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le 0, \\ 1/2, & \text{kai } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{kai } x > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Tos funkcijos grafikas pavaizduotas 13 paveiksle.

2 pavyzdys. 1 skyrelio 7 pavyzdžio atsitiktinis dydis X_n įgyja reikšmes $0, 1, ..., n$. Reikšmę k jis įgyja su tikimybe

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

To dydžio, vadinamo binominiu, pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \sum_{k<x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k};$$

čia sumuojama pagal visus sveikuosius neneigiamus k, kurie yra mažesni už x (tuščia suma lygi nuliui!), t. y.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le 0, \\ q^n, & \text{kai } 0 < x \le 1, \\ q^n + npq^{n-1}, & \text{kai } 1 < x \le 2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, & \text{kai } n-1 < x \le n, \\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1, & \text{kai } x > n. \end{cases}$$

14 paveiksle pavaizduotas jos grafikas, kai $n = 4,\ p = 1/3$.

Atkreipsime dėmesį, kad skirtingi atsitiktiniai dydžiai gali turėti tą pačią pasiskirstymo funkciją.Tai matyti iš paprasto pavyzdžio. Imkime tikimybinę erdvę, aprašytą 1.6 pavyzdyje, ir apibrėžkime du atsitiktinius dydžius

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \omega = \omega_1, \\ 0, & \text{kai } \omega = \omega_0, \end{cases}$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{kai } \omega = \omega_1, \\ 1, & \text{kai } \omega = \omega_0. \end{cases}$$

Jų abiejų pasiskirstymo funkcijos yra tos pačios ir lygios (1) funkcijai.

Panagrinėsime pasiskirstymo funkcijų savybes. Toliau F reikš atsitiktinio dydžio X, nusakyto tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, pasiskirstymo funkciją.

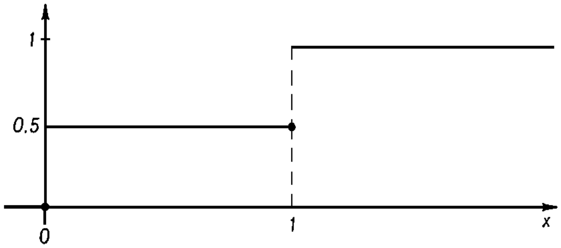
1 teorema. *F yra nemažėjanti funkcija: jei $x' < x''$, tai $F(x') \le F(x'')$.*

Į r o d y m a s. Kadangi įvykis $\{X < x'\}$ yra įvykio $\{X < x''\}$ atskiras atvejis: $\{X < x'\} \subset \{X < x''\}$, tai iš I.10.3 teoremos 2 išvados turime

$$P(X < x') \le P(X < x''),$$

t. y.

$$F(x') \le F(x''). \square$$

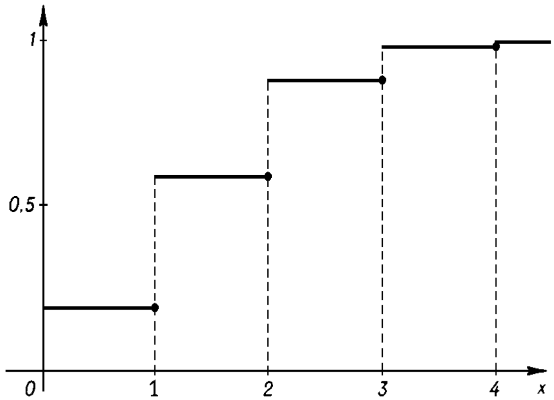


13 pav.

Kadangi pasiskirstymo funkcijos F reikšmė taške x yra tikimybė, tai $0 \le$ $\le F(x) \le 1$. Be to, monotoniška funkcija turi ribą, kai argumentas tolsta į $-\infty$ arba ∞. Pažymėsime

$$\lim_{n \to -\infty} F(x) = F(-\infty), \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty).$$

Kam lygios tos ribos?



14 pav.

2 teorema. $F(-\infty) = 0, \; F(\infty) = 1.$

Į r o d y m a s. Imkime bet kurias dvi monotoniškas skaičių sekas $x_n \searrow -\infty, \; y_n \nearrow \infty$. Įvykiai $A_n = \{X < x_n\}$ sudaro monotoniškai mažėjančią seką $A_1 \supset A_2 \supset ...$, o įvykiai $B_n = \{Y < y_n\}$ – monotoniškai didėjančią seką $B_1 \subset B_2 \subset ...$ Be to,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing, \; \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega.$$

Iš I.10.8 ir I.10.7 teoremų gauname, kad $P(A_n) \to P(\varnothing) = 0, \; P(B_n) \to P(\Omega) = 1$, t. y. $F(x_n) \to 0, \; F(y_n) \to 1$, kai $n \to \infty$. $\square$

Monotoniška funkcija kiekviename taške turi ribas iš kairės $F(x-0)$ ir iš dešinės $F(x+0)$; tos ribos nesutampa, kai funkcija nėra tolydi taške x. Jei $F(x-0) = F(x)$, tai sakome, kad funkcija tolydi taške x iš kairės.

3 teorema. *Pasiskirstymo funkcija yra tolydi iš kairės visuose taškuose.*

Į r o d y m a s. Imkime bet kurią monotoniškai didėjančią ir konverguojančią į x skaičių seką $x_n \nearrow x$. Pažymėkime $A_n = \{X < x_n\}$. Aišku, įvykiai A_n sudaro monotoniškai didėjančią įvykių seką $A_1 \subset A_2 \subset ...$ ir

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{X < x\}.$$

Todėl iš I.10.7 teoremos išplaukia, kad $P(A_n) \to P(X < x)$, t. y. $F(x_n) \to F(x)$, kai $n \to \infty$. $\square$

P a s t a b a. Jei pasiskirstymo funkciją F būtume apibrėžę lygybe $F(x) = P(X \leq x)$, tai ji būtų tolydi iš dešinės: $F(x+0) = F(x)$.

4 teorema. *Koks bebūtų realusis x, teisinga lygybė*

$$P(X \leq x) = F(x+0).$$

Į r o d y m a s. Imkime monotoniškai mažėjančią ir konverguojančią į x skaičių seką $x_n \searrow x$. Pažymėkime $A_n = \{X < x_n\}$. Turėsime monotoniškai mažėjančią įvykių seką $A_1 \supset A_2 \supset ...$ su sąlyga

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{X \leq x\}.$$

Iš I.10.8 teoremos išplaukia, kad $P(A_n) \to P(X \leq x)$, t. y. $F(x_n) \to P(X \leq x)$, kai $n \to \infty$. $\square$

Kaip matėme iš pavyzdžių, pasiskirstymo funkcija gali turėti trūkio taškų, t. y. tokių taškų x, kuriuose $F(x+0) - F(x-0) = F(x+0) - F(x) > 0$.

Šis skirtumas yra vadinamas funkcijos trūkiu taške x. Apibūdinsime trūkio taškų aibę.

5 teorema. *Pasiskirstymo funkcija turi ne daugiau kaip skaičią aibę trūkio taškų.*

Į r o d y m a s. Pažymėkime T_n aibę duotosios pasiskirstymo funkcijos trūkio taškų, kuriuose trūkiai yra didesni už $1/n$. Kadangi $0 \leq F(x) \leq 1$, tai aibėje T_n yra ne daugiau kaip $n-1$ elementų. Visų trūkio taškų aibė, būdama aibių T_n $(n = 2, 3, ...)$ sąjunga, yra baigtinė arba skaiti. $\square$

Naudinga žinoti dar ir šias įdomias pasiskirstymo funkcijų savybes.

6 teorema. *Jei a ir b – bet kurie realieji skaičiai, $a < b$, tai*

$$\begin{aligned} P(a \leq X < b) &= F(b) - F(a), \\ P(a \leq X \leq b) &= F(b+0) - F(a), \\ P(a < X < b) &= F(b) - F(a+0), \\ P(a < X \leq b) &= F(b+0) - F(a+0), \\ P(X \geq a) &= 1 - F(a), \\ P(X > a) &= 1 - F(a+0). \end{aligned}$$

Į r o d y m a s pagrįstas jau įrodytomis pasiskirstymo funkcijų savybėmis. Įrodysime tik pirmąją lygybę, nes kitos įrodomos analogiškai.

Kadangi $\{X < a\} \subset \{X < b\}$ ir $\{a \leq X < b\} = \{X < b\} \setminus \{X < a\}$, tai pagal I.10.3 teoremos 1 išvadą

$$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a). \ \square$$

Kiekviena funkcija F, apibrėžta visoje skaičių tiesėje R, nemažėjanti, tolydi kiekviename taške iš kairės ir tenkinanti sąlygas $F(x) \to 0$, kai $x \to -\infty$, $F(x) \to 1$, kai $x \to \infty$, yra vadinama *pasiskirstymo funkcija*. Jau iš paties pavadinimo kyla klausimas, ar kiekvieną pasiskirstymo funkciją atitinka atsitiktinis dydis, kurio pasiskirstymo funkcija yra ta funkcija? Pakanka imti tikimybinę erdvę $\{R, \mathcal{B}, \mu_F\}$, kurioje μ_F yra V.6 skyrelyje nusakytas Styltjeso[1] matas, ir apibrėžti funkciją $X(x) = x$, $x \in R$. Ši funkcija yra $\mathcal{B}$ mati, taigi atsitiktinis dydis. Jo pasiskirstymo funkcija $\mu_F\big((-\infty, y)\big) = F(y)$.

Suformuluosime dar vieną klausimą. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X yra apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ ir jo pasiskirstymo funkcija yra F_x. Kiekvienai Borelio aibei B pažymėkime

$$P_X(B) = P\big(X^{-1}(B)\big).$$

[1] Thomas Jean Stieltjes (1856–1894) – olandų ir prancūzų matematikas.

Nesunku patikrinti, kad P_X, būdama apibrėžta Borelio aibių σ algebroje, tenkina visas tikimybinio mato aksiomas. Pirmiausia, ji neneigiama. Be to,

$$P_X(R) = P(\Omega) = 1.$$

Pagaliau, jei Borelio aibė B yra disjunkčių Borelio aibių B_k $(k = 1, 2, ...)$ sąjunga

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,$$

tai

$$P_X(B) = P\big(X^{-1}(B)\big) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} X^{-1}(B_k)\Big) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\big(X^{-1}(B_k)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} P_X(B_k),$$

nes pirmavaizdžiai $X^{-1}(B_k)$ taip pat yra disjunktūs. Vadinasi, realiųjų skaičių tiesė R, jos Borelio aibių σ algebra $\mathcal{B}$ ir matas P_X sudaro tikimybinę erdvę $\{R, \mathcal{B}, P_X\}$. Tikimybinis matas P_X dažnai vadinamas atsitiktinio dydžio X *tikimybiniu pasiskirstymu* (arba *tikimybiniu skirstiniu*). Nagrinėjant atsitiktinį dydį X, paprastai nebūtina žinoti pirmykštės tikimybinės erdvės, kurioje jis buvo nusakytas, – pakanka apsiriboti tikimybine erdve $\{R, \mathcal{B}, P_X\}$. Aišku,

$$F_X(x) = P_X\big((-\infty, x)\big).$$

Taigi tikimybinis pasiskirstymas vienareikšmiškai nusako pasiskirstymo funkciją F_X.

Iš V.6 skyrelyje išdėstytos teorijos išplaukia, jog teisingas ir atvirkštinis teiginys.

Baigdami šį skyrelį, susipažinsime dar su pora sąvokų. Sakome, kad atsitiktinis dydis X yra *simetriškai pasiskirstęs*, arba tiesiog *simetriškas*, jei X ir $-X$ pasiskirstymo funkcijos sutampa: $F_X(x) = F_{-X}(x)$. Tada

$$F_X(x) = P(X < x) = P(-X < x) =$$
$$= P(X > -x) = 1 - F_X(-x + 0),$$

koks bebūtų $x \in R$. Analogiškai sakome, kad atsitiktinis dydis X yra *simetriškas taško* $a \in R$ atžvilgiu, jei $X - a$ yra simetriškas. Tada

$$F_{X-a}(x) = 1 - F_{X-a}(-x + 0)$$

ir

$$F_X(a + x) = 1 - F_X(a - x + 0).$$

I.11 skyrelyje įvedėme sąlyginės tikimybės sąvoką. Ja remdamiesi, galime įvesti ir sąlyginę pasiskirstymo funkciją. Jei E yra koks nors įvykis, $P(E) > 0$, tai dydžio X *sąlygine pasiskirstymo funkcija*, kai E yra įvykęs (su sąlyga E), vadiname

$$F_X(x|E) = P(X < x|E) = \frac{P(\{X < x\} \cap E)}{P(E)}.$$

Kadangi sąlyginės tikimybės tenkina tikimybių teorijos aksiomas, tai sąlyginės pasiskirstymo funkcijos turi 1–6 teoremose nusakytas savybes.

3. DAUGIAMAČIAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

Labai dažnai eksperimento rezultatams aprašyti neužtenka vieno atsitiktinio dydžio, bet reikia jų sistemos. Sakykime, iš patrankos šaudome į nejudantį plokščią taikinį. Pataikymo taškas nurodomas dviem dydžiais. Judančiai dujų molekulei apibūdinti taip pat reikia kelių atsitiktinių dydžių.

Nusakant kelių atsitiktinių dydžių sistemos savybes, nepakanka nurodyti atskirų atsitiktinų dydžių savybių – dar reikia žinoti ir ryšius tarp tų dydžių. Todėl tenka kurti atsitiktinių dydžių sistemų matematinę teoriją. Nagrinėsime kelių atsitiktinių dydžių, kitaip tariant, atsitiktinių vektorių, arba daugiamačių atsitiktinių dydžių teoriją. Čia matysime nemažai analogijos su vienamačiais atsitiktiniais dydžiais, bet susidursime ir su iš esmės naujais faktais.

Tarkime, kad $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ yra tikimybinė erdvė. *s-mačiu atsitiktiniu dydžiu*, arba *s-mačiu atsitiktiniu vektoriumi*, vadiname $(\mathcal{A}, \mathcal{B}^s)$ matų atvaizdį $X : \Omega \to R^s$, kitaip tariant, vektorinę funkciją $X = (X_1, ..., X_s)$, apibrėžtą aibėje Ω, įgyjančią reikšmes iš erdvės R^s ir tenkinančią sąlygą

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A},$$

kokia bebūtų $B \in \mathcal{B}^s$.

s-matės erdvės Borelio aibių σ algebrą generuoja intervalai $x_1 < a_1, ..., x_s < a_s$. Kaip ir 1 skyrelyje, teisingas teiginys: funkcija $X = (X_1, ..., X_s) : \Omega \to R^s$ yra atsitiktinis dydis tada ir tik tada, kai $\{\omega : X_1(\omega) < x_1, ..., X_s(\omega) < x_s\} \in \mathcal{A}$, kokie bebūtų realieji skaičiai $x_1, ..., x_s$.

Iš čia išplaukia ir šitoks teiginys: jei $X_1, ..., X_s$ yra vienamačiai atsitiktiniai dydžiai, tai vektorius $(X_1, ..., X_s)$ yra atsitiktinis, nes

$$\{\omega : X_1(\omega) < x_1, ..., X_s(\omega) < x_s\} = \bigcap_{k=1}^{s} \{\omega : X_k(\omega) < x_k\} \in \mathcal{A},$$

kokie bebūtų realieji skaičiai $x_1, ..., x_s$.

Teisingas ir atvirkštinis teiginys: jei $X = (X_1, ..., X_s)$ yra atsitiktinis vektorius, tai kiekviena iš funkcijų $X_1, ..., X_s$ yra vienamatis atsitiktinis dydis. Įrodysime tai, sakysime, funkcijai X_1. Jei $B \in \mathcal{B}$, tai

$$X_1^{-1}(B) = \{\omega : X_1(\omega) \in B, X_2(\omega) \in R, ..., X_s(\omega) \in R\} =$$
$$= X^{-1}(B \times R \times ... \times R) \in \mathcal{A},$$

nes aibė

$$B \times \underbrace{R \times ... \times R}_{s-1 \text{ kartų}}$$

yra erdvės R^s Borelio aibė.

Teisingi analogiški, kaip ir vienamačiu atveju, teiginiai apie veiksmus su atsitiktiniais vektoriais.

Apibendrinsime 1.1 teoremą. Mums reikės bendresnių Borelio funkcijų. Taip vadinamos ir funkcijos $\varphi : R^r \to R^s$, $(\mathcal{B}^r, \mathcal{B}^s)$ mačios:

$$\varphi^{-1}(B) = \{x \in R^r,\ \varphi(x) \in B\} \in \mathcal{B}^r,$$

kokia bebūtų $B \in \mathcal{B}^s$.

1 teorema. *Jei X yra s-matis atsitiktinis vektorius, o $\varphi : R^s \to R^r$ – Borelio funkcija, tai $\varphi(X)$ yra r-matis atsitiktinis vektorius.*

Į r o d y m a s analogiškas 1.1 teoremos įrodymui. Remdamiesi atsitiktinio vektoriaus apibrėžimu, turime

$$\Big\{\omega : \varphi\big(X(\omega)\big) \in B\Big\} = \{\omega : X(\omega) \in \varphi^{-1}(B)\} \in \mathcal{A},$$

kokia bebūtų Borelio aibė $B \in \mathcal{B}^s$. $\square$

4. DAUGIAMAČIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ PASISKIRSTYMO FUNKCIJOS

Jei X yra atsitiktinis vektorius, tai galime kalbėti apie aibės $\{\omega : X_1(\omega) < x_1, ..., X_s(\omega) < x_s\}$, arba, užrašant trumpiau, aibės $\{X_1 < x_1, ..., X_s < x_s\}$ tikimybinį matą. Funkcija

$$F_X(x) = F_{(X_1,...,X_s)}(x_1, ..., x_s) = P(X_1 < x_1, ..., X_s < x_s)$$

yra apibrėžta visoje erdvėje R_s; ji vadinama atsitiktinio vektoriaus X *pasiskirstymo funkcija.*

Atsitiktinių vektorių pasiskirstymo funkcijų savybės yra analogiškos vienamačių atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijų savybėms, kurias tyrėme 2 skyrelyje. Suprantama, jos yra kelių kintamųjų funkcijos, todėl turi savo specifiką.

Toliau visur $X = (X_1, ..., X_s)$ reikš atsitiktinį vektorių, o $F(x) = F_X(x) = F_{(X_1,...,X_s)}(x_1, ..., x_s)$ – to vektoriaus pasiskirstymo funkciją. Aišku, kad $0 \leq F(x) \leq 1$, nes tokias nelygybes tenkina tikimybinis matas.

1 teorema. *Pasiskirstymo funkcija yra nemažėjanti kiekvieno argumento atžvilgiu.*

Į r o d y m a s. Dėl paprastumo teoremą įrodinėsime pirmojo argumento atžvilgiu. Tarkime, kad $x_1' < x_1''$. Aišku,

$$\{X_1 < x_1', X_2 < x_2, ..., X_s < x_s\} \subset$$
$$\subset \{X_1 < x_1'', X_2 < x_2, ..., X_s < x_s\}.$$

Iš tikimybės monotoniškumo (I.10.3 teoremos 2 išvados) išplaukia

$$P(X_1 < x_1', X_2 < x_2, ..., X_s < x_s) \leq$$
$$\leq P(X_1 < x_1'', X_2 < x_2, ..., X_s < x_s),$$

t. y. $F(x_1', x_2, ..., x_s) \leq F(x_1'', x_2, ..., x_s)$. □

Pagal šią teoremą egzistuoja ribos

$$\lim_{x_k \to -\infty} F(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_s),$$
$$\lim_{x_k \to \infty} F(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_s),$$

kurias žymėsime atitinkamai

$$F(x_1, ..., x_{k-1}, -\infty, x_{k+1}, ..., x_s),$$
$$F(x_1, ..., x_{k-1}, \infty, x_{k+1}, ..., x_s).$$

Panagrinėsime tas ribas.

2 teorema. *Jei* $1 \leq k \leq s$, *tai*

$$F(x_1, ..., x_{k-1}, -\infty, x_{k+1}, ..., x_s) = 0.$$

Į r o d y m a s. Norėdami suprastinti užrašus, nagrinėsime tik pirmąjį argumentą. Imkime kurią nors seką $x_1^{(n)} \searrow -\infty$. Pažymėkime

$$A_n = \{X_1 < x_1^{(n)}, X_2 < x_2, ..., X_s < x_s\}.$$

Tada $A_1 \supset A_2 \supset ...$ ir $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$. Pagal I.10.8 teoremą $P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, taigi $F(x_1^{(n)}, x_2, ..., x_s) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

3 teorema. *Jei* $1 \leq k \leq s$, $s \geq 2$, *tai*

$$F_{(X_1, ..., X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, ..., X_s)}(x_1, ..., x_{k-1}, \infty, x_{k+1}, ..., x_s)$$

yra atsitiktinio dydžio $(X_1, ..., X_{k-1}, X_{k+1}, ..., X_s)$ *pasiskirstymo funkcija*

$$F_{(X_1,...,X_{k-1},X_{k+1},...,X_s)}(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_s) =$$
$$= P(X_1 < x_1, ..., X_{k-1} < x_{k-1}, X_{k+1} < x_{k+1}, ..., X_s < x_s).$$

Į r o d y m a s. Tirsime tik atvejį, kai $k = 1$. Imkime seką $x_1^{(n)} \nearrow \infty$. Pažymėkime A_n įvykį

$$\{X_1 < x_1^{(n)}, X_2 < x_2, ..., X_s < x_s\}.$$

Turime monotoniškai didėjančią įvykių seką $A_1 \subset A_2 \subset ...$ Aišku,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{X_2 < x_2, ..., X_s < x_s\}.$$

Pagal I.10.7 teoremą

$$\lim_{n\to\infty} F(x_1^{(n)}, x_2, ..., x_s) = P(X_2 < x_2, ..., X_s < x_s). \ \square$$

Analogiškai įrodome ir šitokį teiginį.

3a teorema. *Jei* $1 \le k_1 < k_2 < ... < k_r \le s$*, tai*

$$\lim F_{(X_1,...,X_s)}(x_1, ..., x_s) = F_{(X_{k_1},X_{k_2},...,X_{k_r})}(x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r}).$$

Čia $x_j \to \infty$*, kai* j *nelygus* $k_1, k_2, ..., k_r$.

Funkcija $F_{(X_{k_1},X_{k_2},...,X_{k_r})}(x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r})$ yra vadinama funkcijos $F(x_1, x_2, ..., x_s)$ ir atsitiktinio dydžio $(X_1, ..., X_s)$ *marginaliąja pasiskirstymo funkcija* (suprantama, kai $\{k_1, ..., k_r\}$ nesutampa su $\{1, ..., s\}$).

3b teorema. *Jei visi daugiamatės pasiskirstymo funkcijos argumentai tolsta į begalybę, tai*

$$\lim_{\substack{x_1\to\infty \\ \cdots \\ x_s\to\infty}} F(x_1, ..., x_s) = F(\infty, ..., \infty) = 1.$$

Kadangi pasiskirstymo funkcija yra monotoniška kiekvieno argumento atžvilgiu, tai egzistuoja ribos

$$\lim_{x_k'\nearrow x_k} F(x_1, ..., x_{k-1}, x_k', x_{k+1}, ..., x_s) =$$
$$= F(x_1, ..., x_{k-1}, x_k - 0, x_{k+1}, ..., x_s),$$
$$\lim_{x_k''\searrow x_k} F(x_1, ..., x_{k-1}, x_k'', x_{k+1}, ..., x_s) =$$
$$= F(x_1, ..., x_{k-1}, x_k + 0, x_{k+1}, ..., x_s).$$

Kaip ir vienamačiu atveju, pirmoji riba sutampa su $F(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_s)$, kitaip tariant, teisinga šitokia teorema.

4 teorema. *Pasiskirstymo funkcija yra tolydi iš kairės kiekvieno argumento atžvilgiu.*

Į r o d y m a s. Nagrinėsime tolydumą pirmojo argumento atžvilgiu. Imkime seką $x_1^{(n)} \nearrow x_1$ ir pažymėkime

$$A_n = \{X_1 < x_1^{(n)}, X_2 < x_2, ..., X_s < x_s\}.$$

Turime $A_1 \subset A_2 \subset ...$ ir

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_s < x_s\}.$$

Iš I.10.7 teoremos išplaukia, kad

$$P(A_n) \to P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big),$$

kai $n \to \infty$, t. y.

$$F(x_1^{(n)}, x_2, ..., x_s) \to F(x_1, x_2, ..., x_s). \ \square$$

Išreikšime pasiskirstymo funkcija tikimybę, kad atsitiktinis vektorius priklausys intervalui. Sakykime, I yra erdvės R_s intervalas

$$\begin{aligned} a_1 \le x_1 &< b_1, \\ a_2 \le x_2 &< b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_s \le x_s &< b_s. \end{aligned} \tag{1}$$

Sutrumpintai pažymėkime $I_k = [a_k, b_k)$ $(k = 1, ..., s)$. Kai $F : R_s \to R$ yra bet kuri (nebūtinai pasiskirstymo) funkcija, įvesime operatorių

$$\begin{aligned} &\Delta_{I_k}^{(k)} F(x_1, ..., x_s) = F(x_1, ..., x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, ..., x_s) - \\ &- F(x_1, ..., x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, ..., x_s) = \\ &= \sum_{\varepsilon} (-1)^{\varepsilon} F(x_1, ..., x_{k-1}, \varepsilon a_k + (1-\varepsilon) b_k, x_{k+1}, ..., x_s); \end{aligned}$$

čia ε įgyja dvi reikšmes: 0 ir 1. Pažymėkime

$$\begin{aligned}\Delta_I F = \Delta_I F(x_1, ..., x_s) = \Delta_{I_1}^{(1)} ... \Delta_{I_s}^{(s)} F(x_1, ..., x_s) = \\ = \sum_{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_s} (-1)^{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_s} F\bigl(\varepsilon_1 a_1 + \\ + (1-\varepsilon_1) b_1, ..., \varepsilon_s a_s + (1-\varepsilon_s) b_s\bigr);\end{aligned}$$

čia $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_s$ nepriklausomai vienas nuo kito įgyja reikšmes 0 ir 1. Kitaip tariant,

$$\begin{aligned}\Delta_I F = F(b_1, b_2, ..., b_s) - F(a_1, b_2, ..., b_s) - \\ - F(b_1, a_2, b_3, ..., b_s) - ... - F(b_1, ..., b_{s-1}, a_s) + \\ + F(a_1, a_2, b_3, ..., b_s) + F(a_1, b_2, a_3, b_4, ..., b_s) + ... + \\ + F(b_1, ..., b_{s-2}, a_{s-1}, a_s) + ... + (-1)^s F(a_1, a_2, ..., a_s).\end{aligned}$$

5 teorema. $P(X \in I) = \Delta_I F$.

Į r o d y m a s. Kadangi

$$\begin{aligned}\{X_1 \in I_1, X_2 < x_2, ..., X_s < x_s\} = \\ = \{X_1 < b_1, X_2 < x_2, ..., X_s < x_s\} \backslash \\ \backslash \{X_1 < a_1, X_2 < x_2, ..., X_s < x_s\}\end{aligned}$$

ir antrasis įvykis dešinėje lygybės pusėje yra pirmojo atskiras atvejis, tai

$$\begin{aligned}P(X_1 \in I_1, X_2 < x_2, ..., X_s < x_s) = \Delta_{I_1}^{(1)} F(x_1, x_2, ..., x_s) = \\ = \sum_{\varepsilon_1} (-1)^{\varepsilon_1} F\bigl(\varepsilon_1 a_1 + (1-\varepsilon_1) b_1, x_2, ..., x_s\bigr).\end{aligned}$$

Analogiškai iš lygybės

$$\begin{aligned}\{X_1 \in I_1, X_2 \in I_2, X_3 < x_3, ..., X_s < x_s\} = \\ = \{X_1 \in I_1, X_2 < b_2, X_3 < x_3, ..., X_s < x_s\} \backslash \\ \backslash \{X_1 \in I_1, X_2 < a_2, X_3 < x_3, ..., X_s < x_s\}\end{aligned}$$

gauname

$$\begin{aligned}P(X_1 \in I_1, X_2 \in I_2, X_3 < x_3, ..., X_s < x_s) = \\ = \Delta_{I_2}^{(2)} \bigl(\Delta_{I_1}^{(1)} F(x_1, x_2, ..., x_s)\bigr) = \sum_{\varepsilon_2} (-1)^{\varepsilon_2} \sum_{\varepsilon_1} (-1)^{\varepsilon_1} \times \\ \times F\bigl(\varepsilon_1 a_1 + (1-\varepsilon_1) b_1, \varepsilon_2 a_2 + (1-\varepsilon_2) b_2, x_3, ..., x_s\bigr).\end{aligned}$$

Taip samprotaudami toliau, gausime reikiamą lygybę. □

Išvada. $\Delta_I F \geq 0$, *koks bebūtų intervalas* I.

Svarbiausios daugiamačių pasiskirstymo funkcijų F savybės yra:
1) kai $1 \leq k \leq s$, $F(x_1, ..., x_s) \to 0$, jei $x_k \to -\infty$;
2) $F(x_1, ..., x_s) \to 1$, kai $x_1 \to \infty, ..., x_s \to \infty$;
3) F yra tolydi iš kairės kiekvieno argumento atžvilgiu;
4) jei $I \subset R^s$ yra (1) pavidalo intervalas, tai

$$\Delta_I F \geq 0.$$

Iš minėtų savybių išplaukia visos kitos. Įrodysime, pavyzdžiui, kad iš 4 savybės išplaukia 1 teoremoje nusakyta savybė: funkcija nemažėja kiekvieno argumento atžvilgiu. Pasirinksime pirmąjį argumentą. Leiskime skaičiams $a_2, ..., a_s$ tolti į $-\infty$. Gausime

$$F(b_1, b_2, ..., b_s) - F(a_1, b_2, ..., b_s) \geq 0.$$

Iš karto atrodytų, kad teisingas ir atvirkštinis teiginys: 4 savybę galima suprastinti, reikalaujant tik, kad funkcija būtų nemažėjanti kiekvieno argumento atžvilgiu. Tačiau taip nėra. Imkime dviejų kintamųjų funkciją

$$G(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x_1 + x_2 > 0, \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Ši funkcija tenkina 1, 2, 3 savybes ir yra nemažėjanti kiekvieno argumento atžvilgiu, tačiau

$$G(2, 2) - G(-1, 2) - G(2, -1) + G(-1, -1) = -1 < 0.$$

Vadinasi, ji neturi 4 savybės.

Kiekvieną funkciją F, apibrėžtą visoje erdvėje R^s ir turinčią 1–4 savybes, vadiname *daugiamate pasiskirstymo funkcija.*

Kiekvienam atsitiktiniam vektoriui X, nusakytam erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, priskirsime kitą tikimybinę erdvę $\{R^s, \mathcal{B}^s, P_X\}$, kurioje

$$P_X(B) = P\big(X^{-1}(B)\big) = P(X \in B),$$

kai $B \in \mathcal{B}^s$. Sakome, kad atsitiktinis dydis indukuoja tikimybinę erdvę $\{R^s, \mathcal{B}^s, P_X\}$ ir tikimybinį matą P_X. Pastarasis dažnai vadinamas atsitiktinio dydžio X *tikimybiniu pasiskirstymu* (arba *skirstiniu*). Tikimybinis matas P_X vienareikšmiškai nusako dydžio X pasiskirstymo funkciją F_X.

5. SVARBIAUSI PASISKIRSTYMO FUNKCIJŲ TIPAI

Iš pradžių nagrinėsime vienamačius atsitiktinius dydžius X, kurių pasiskirstymo funkcijos $F_X = F$. Tašką x_0 vadinsime funkcijos F *didėjimo tašku*, jei teisinga nelygybė $F(x_0 - \varepsilon) < F(x_0 + \varepsilon)$, koks bebūtų $\varepsilon > 0$. Tuo atveju atsitiktinis dydis X priklauso intervalui $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ su teigiama tikimybe, koks bebūtų $\varepsilon > 0$. Visų funkcijos F didėjimo taškų aibę žymėsime S_F.

1 teorema. $P(X \in S_F) = 1$.

Į r o d y m a s. Iš didėjimo taško apibrėžimo išplaukia, kad, paėmus bet kurį $x \in S_F^c$, galima rasti tokį atvirą intervalą $\big(a(x), b(x)\big)$, kuriam priklauso x ir kuriame nėra funkcijos F didėjimo taškų. Tą intervalą laikysime didžiausiu galimu. Tada arba $a(x) \in S$, arba $a(x) = -\infty$ ir arba $b(x) \in S$, arba $b(x) = \infty$. Tikimybė $P\big(a(x) < X < b(x)\big) = 0$. Aibę S_F^c dengia intervalai $\big(a(x), b(x)\big)$. Tarp jų yra ne daugiau kaip skaiti aibė skirtingų (a_k, b_k). Iš lygybės

$$S_F^c = \bigcup_k (a_k, b_k)$$

gauname

$$P(X \in S_F^c) = \sum_k P(a_k < X < b_k) = 0.$$

Todėl $P(X \in S_F) = 1$. $\square$

Jei S_F yra baigtinė arba skaiti aibė, tai sakome, kad atsitiktinis dydis X yra *diskretusis*, o atitinkama pasiskirstymo funkcija F – *diskrečioji*.

Pažymėkime diskrečiosios pasiskirstymo funkcijos didėjimo taškus $\{x_k\}$ ir tikimybes $P(X = x_k) = p_k$. Tada $p_k = F(x_k + 0) - F(x_k)$ yra funkcijos F trūkiai,

$$P(x \in S_F) = \sum_k p_k = 1.$$

Pasiskirstymo funkciją F galime užrašyti šitaip:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k.$$

Tai – laiptuota funkcija, kurios trūkio taškai yra x_k, o tarp jų funkcija yra pastovi.

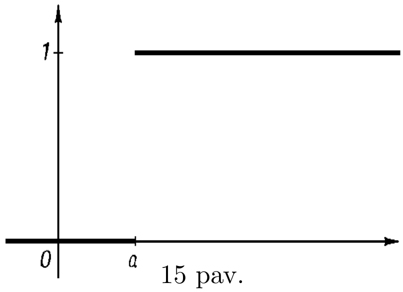
Išnagrinėsime keletą pavyzdžių.

2 skyrelio 1 ir 2 pavyzdžiuose nagrinėti atsitiktiniai dydžiai yra diskretieji. Antrajame iš jų nagrinėjamas atsitiktinis dydis yra vadinamas *binominiu*.

1 p a v y z d y s. Paprasčiausias diskretusis dydis yra dydis, įgyjantis vieną reikšmę, sakysime a, su tikimybe 1. Jo pasiskirstymo funkcija

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le a, \\ 1, & \text{kai } x > a. \end{cases}$$

Tos funkcijos grafiką matome 15 paveiksle. Toks atsitiktinis dydis ir jo pasiskirstymo funkcija vadinami *išsigimusiais*.



15 pav.

2 pavyzdys. Puasono pasiskirstymas. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes 0, 1, 2, ... ir reikšmę k įgyja su tikimybe

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};$$

čia λ – teigiamas fiksuotas skaičius. Sakome, kad atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį. Aišku,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1.$$

3 pavyzdys. Geometrinis pasiskirstymas. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X įgyja visas sveikąsias neneigiamas reikšmes ir reikšmę k įgyja su tikimybe

$$P(X = k) = p(1 - p)^k;$$

čia p – fiksuotas skaičius, $0 < p < 1$;

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(1 - p)^k = 1.$$

Sakome, kad atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs pagal geometrinį dėsnį.

Atsitiktinį dydį X ir jo pasiskirstymo funkciją F vadiname *tolydžiaisiais*, jei pasiskirstymo funkcija F neturi trūkio taškų, kitaip tariant, yra tolydi. Tada

$$F(x + 0) - F(x) = 0, \ P(X = x) = 0,$$

koks bebūtų $x \in R$.

Išskirsime siauresnę tolydžiųjų dydžių klasę. Sakysime, kad atsitiktinis dydis X ir jo pasiskirstymo funkcija F yra *absoliučiai tolydūs*, jei egzistuoja funkcija $p_X = p$, apibrėžta tiesėje R, integruojama Lebego prasme ir tenkinanti sąlygą

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$$

(čia integruojama Lebego prasme). Funkcija p yra vadinama atsitiktinio dydžio X *tankiu*. Ji nėra vienareikšmiškai nusakyta. Bet kaip pakeitus p nulinio Lebego mato aibėje, integralas nesikeičia.Todėl tankiu laikome bet kurią iš galimų funkcijų p. Iš Lebego integralo teorijos žinoma (žr. [18], VIII skyr.), kad tuo atveju $F(x)$ beveik visur (Lebego mato prasme) turi neneigiamą išvestinę, kuri beveik visur yra lygi $p(x)$. Be to, aišku,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(u)du = 1. \tag{1}$$

Atvirkščiai, jei funkcija p, apibrėžta tiesėje R, yra integruojama ir beveik visur neneigiama bei tenkina (1) sąlygą, tai

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$$

yra pasiskirstymo funkcija.

Teisinga lygybė

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) = \int_{[a,b)} p(u)du.$$

Teisinga ir daug bendresnė

2 teorema. *Jei X yra absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis su tankio funkcija $p(u)$, tai*

$$P(X \in B) = \int_{B} p(u)du, \tag{2}$$

kokia bebūtų Borelio aibė B.

Į r o d y m a s. Mačioje erdvėje $\{R, B\}$ imkime du matus

$$P(X \in B) \ \text{ ir } \ \int_{B} p(u)du.$$

Mums reikia įrodyti, kad jie sutampa.

Iš pradžių tarkime, kad B yra intervalas vieno iš pavidalų

$$(-\infty, \infty),\ (-\infty, a),\ [a, b),\ [a, \infty); \tag{3}$$

čia a, b – bet kurie realieji skaičiai. Parodysime, kad tokioms aibėms teisinga (2) formulė. Iš (1) formulės

$$P(-\infty < X < \infty) = 1 = \int_{(-\infty,\infty)} p(u)du.$$

Iš tankio funkcijos apibrėžimo

$$P(X < a) = F(a) = \int_{(-\infty,a)} p(u)du.$$

Toliau,

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_{[a,b)} p(u)du,$$

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = \int_{[a,\infty)} p(u)du.$$

Iš tikimybinio mato ir integralo adityvumo išplaukia, kad (2) formulė yra teisinga ir tada, kai B yra disjunkčių (3) tipo intervalų sąjunga. Tarkime, kad

$$B = \bigcup_{k=1}^{s} B_k,\ B_j \cap B_k = \varnothing\ (j \neq k),$$

yra tokia sąjunga. Tada

$$P(X \in B) = \sum_{k=1}^{s} P(X \in B_k) = \sum_{k=1}^{s} \int_{B_k} p(u)du = \int_B p(u)du.$$

Tačiau visos tokios sąjungos sudaro aibių algebrą, kurios generuota σ algebra ir yra visų Borelio aibių sistema. Antra vertus, funkcijos

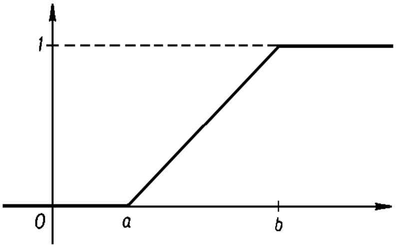
$$P(X \in B) \quad \text{ir} \quad \int_B p(u)du$$

yra visiškai adityvios toje algebroje. Todėl pagal mato pratęsimo teoremą (2) lygybė yra teisinga, kokia bebūtų Borelio aibė B. $\square$

Rekomenduojame skaitytojui pačiam įsitikinti, kad 4–11 pavyzdžiuose p yra tankio funkcijos.

4 p a v y z d y s. T o l y g u s i s p a s i s k i r s t y m a s. Sakome, kad atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs tolygiai, jei jo pasiskirstymo funkcija (16 pav.)

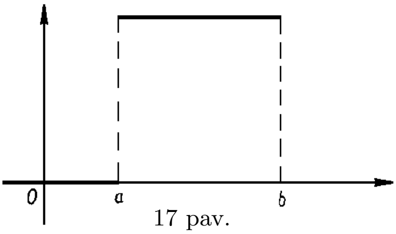
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{kai } a < x < b, \\ 1, & \text{kai } x \geq b; \end{cases}$$



16 pav.

čia $a < b$ – fiksuoti skaičiai. Šią pasiskirstymo funkciją atitinka tankio funkcija (17 pav.)

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{kai } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{kai } x < a \text{ arba } x > b. \end{cases}$$



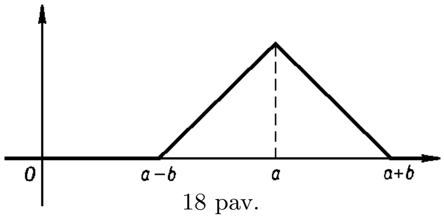
17 pav.

5 pavyzdys. Trikampiškasis, arba Simpsono[1], pasiskirstymas. Taip vadinamas pasiskirstymas, kurį apibūdina tankio funkcija (žr. 18 pav.)

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b^2}(b - |x-a|), & \text{kai } |x-a| < b, \\ 0, & \text{kai } |x-a| \geq b; \end{cases}$$

[1] Thomas Simpson (1710–1761) – anglų matematikas.

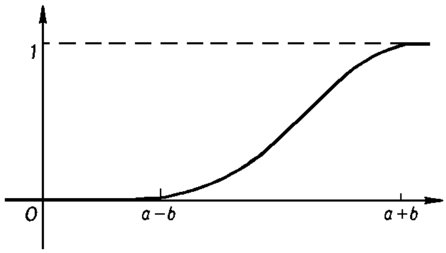
čia a – fiksuotas realusis skaičius, b – teigiamas fiksuotas skaičius. Atitinkama pasiskirstymo funkcija pavaizduota 19 paveiksle.



18 pav.

6 pavyzdys. Normalusis pasiskirstymas. Tai vienas iš svarbiausių pasiskirstymų. Su juo jau susidūrėme I.15 skyrelyje. Normalųjį pasiskirstymą nusako tankio funkcija

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\Big(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\Big);$$

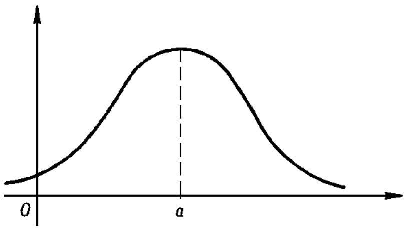


19 pav.

atitinkama pasiskirstymo funkcija yra

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} exp\Big(-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}\Big) du;$$

čia a – bet kuris fiksuotas realusis skaičius, σ – fiksuotas teigiamas skaičius. Jų grafikai pateikti 20 ir 21 paveiksluose. Tankio funkcija turi maksimumą taške $x = a$. Tas taškas yra pasiskirstymo funkcijos vingio taškas.



20 pav.

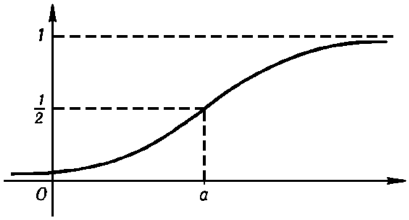
Parametrui σ didėjant, tankio funkcija darosi "lėkštesnė" (žr. 22 pav., $a = 0$). Šis pasiskirstymas dažnai žymimas $N(a, \sigma^2)$.

Kai $a = 0,\ \sigma = 1$, sakome, kad turime *standartinį normalųjį pasiskirstymą.*

7 pavyzdys. Gama pasiskirstymas. Šiuo atveju tankio funkcija

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le 0, \\ \dfrac{x^\alpha e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}, & \text{kai } x > 0; \end{cases}$$

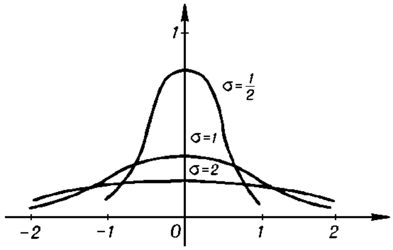
parametrai $\alpha > -1,\ \beta > 0$.



21 pav.

8 pavyzdys. Beta pasiskirstymas. Tankio funkcija

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le 0 \text{ arba } x \ge 1, \\ \dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)}, & \text{kai } 0 < x < 1; \end{cases}$$



22 pav.

čia parametrai $p > 0,\ q > 0,$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

9 pavyzdys. Neigiamas eksponentinis pasiskirstymas. Tankio funkcija

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le \beta, \\ \alpha e^{-\alpha(x-\beta)}, & \text{kai } x > \beta; \end{cases}$$

pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le \beta, \\ 1 - e^{-\alpha(x-\beta)}, & \text{kai } x > \beta; \end{cases}$$

parametrai $\alpha > 0,\ \beta \in R.$

10 pavyzdys. Koši[1] pasiskirstymas. Tankio funkcija

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)};$$

pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x.$$

Naudingas ir apibendrintasis Koši pasiskirstymas, kurio tankio funkcija yra

$$\frac{b}{\pi\Big(b^2 + (x-a)^2\Big)};$$

čia $a \in R,\ b > 0.$

11 pavyzdys. Laplaso pasiskirstymas. Tankio funkcija

[1] Augustin Cauchy (1789–1857) – prancūzų matematikas.

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|};$$

pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & \text{kai } x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$$

Kitas svarbus tolydžiųjų pasiskirstymų tipas yra vadinamieji *singuliarieji pasiskirstymai.* Taip vadinamos tolydžiosios pasiskirstymo funkcijos, kurių didėjimo taškų aibės turi nulinį Lebego matą. Atitinkami atsitiktiniai dydžiai vadinami *singuliariaisiais.* Galima būtų įrodyti, kad tokia pasiskirstymo funkcija beveik visur turi išvestinę, kuri beveik visur yra lygi 0.

Sukonstruosime singuliariosios pasiskirstymo funkcijos pavyzdį.

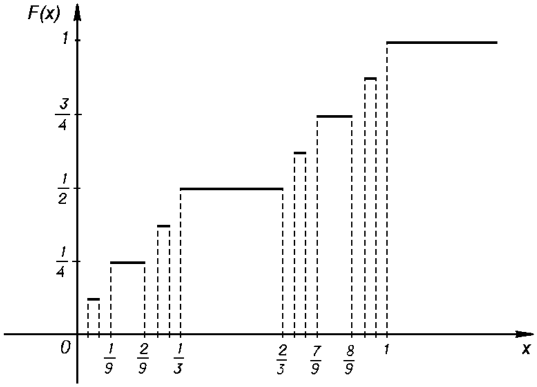
12 p a v y z d y s. Imkime pasiskirstymo funkciją $F(x) = 0$, kai $x \leq 0$, $F(x) = 1$, kai $x \geq 1$ (23 pav.). Uždarą intervalą $[0,\ 1]$ suskaidykime į tris dalis $[0,\ 1/3]$, $[1/3,\ 2/3]$, $[2/3,\ 1]$. Viduriniame uždarame intervale imkime $F(x) = 1/2$. Uždarus intervalus $[0,\ 1/3]$ ir $[2/3,\ 1]$ vėl skaidykime į tris dalis $[0,\ 1/9]$, $[1/9,\ 2/9]$, $[2/9,\ 1/3]$ ir $[2/3,\ 7/9]$, $[7/9,\ 8/9]$, $[8/9,\ 1]$. Viduriniame iš pirmųjų trijų uždarų intervalų imkime $F(x) = 1/4$, viduriniame iš kitų trijų uždarų intervalų – $F(x) = 3/4$. Kiekvieną iš uždarų intervalų $[0,\ 1/9]$, $[2/9,\ 1/3]$, $[2/3,\ 7/9]$, $[8/9,\ 1]$ vėl skaidykime į tris 3^{-3} ilgio uždarus intervalus ir viduriniuose iš gautų uždarų intervalų trejetų imkime funkciją F, lygią aritmetiniam vidurkiui gretimų, jau nusakytų F reikšmių, t. y. $1/8$, $3/8$, $5/8$, $7/8$. Šį procesą tęsiame be galo. Taip apibrėšime funkciją tiems uždaro intervalo $[0,\ 1]$ taškams, kurie priklauso "viduriniams" uždariems intervalams. Jų aibės Lebego matas bus

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + ... = 1.$$

Likusiuose uždaro intervalo $[0,\ 1]$ taškuose $F(x)$ nusakome kaip viršutinį jos reikšmių $F(y)$ rėžį, kai y prabėga mažesnius už x segmento taškus, kuriuose F jau yra apibrėžta. Taip apibrėžta funkcija F yra tolydi segmente $[0,\ 1]$. Jos didėjimo taškų aibė turi nulinį Lebego matą.

Diskrečiosios, absoliučiai tolydžios ir singuliariosios funkcijos yra svarbiausios. Gana paprastu būdu jomis galima išreikšti kiekvieną kitą pasiskirstymo funkcją. Teisinga teorema, tvirtinanti, kad kiekvieną pasiskirstymo funkciją F galima vienareikšmiškai užrašyti šitaip:

$$F(x) = \alpha_d F_d(x) + \alpha_{at} F_{at}(x) + \alpha_s F_s(x);$$



23 pav.

čia F_d – atitinkama diskrečioji, F_{at} – absoliučiai tolydi, F_s – singuliarioji pasiskirstymo funkcija, $\alpha_d, \alpha_{at}, \alpha_s$ – neneigiamos konstantos, $\alpha_d+\alpha_{at}+\alpha_s = 1$ (žr., pvz., [18], VIII skyr.).

Analogiška teorija teisinga ir daugiamačiams pasiskirstymams. Atsitiktinis vektorius $X = (X_1, ..., X_s)$ bei jo pasiskirstymo funkcija $F_X = F$ yra vadinami *diskrečiaisiais*, jei egzistuoja tokia baigtinė arba skaiti aibė S, kad $P(X \in S) = 1$; vadinami *absoliučiai tolydžiais*, jei egzistuoja integruojama Lebego prasme funkcija $p = p_X$, apibrėžta erdvėje R^s ir turinti savybę

$$F(x_1, ..., x_s) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_s} p(u_1, ..., u_s) du_1 ... du_s.$$

Funkcija p yra vadinama atsitiktinio vektoriaus X *tankiu.* Šiuo atveju beveik visur egzistuoja išvestinė

$$\frac{\partial^s F(x_1, ..., x_s)}{\partial x_1 ... \partial x_s},$$

kuri beveik visur yra neneigiama ir lygi $p(x_1, ..., x_s)$. Tankio funkcija, aišku, tenkina lygybę

$$\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} p(u_1, ..., u_s) du_1 ... du_s = 1.$$

Atsitiktinis vektorius ir jo pasiskirstymo funkcija yra vadinami *singuliariaisiais*, jei F yra tolydi ir egzistuoja tokia nulinio Lebego mato aibė S, kad $P(X \in S) = 1$.

Kiekvieną daugiamatę pasiskirstymo funkciją galima išreikšti diskrečiosios, absoliučiai tolydžios ir singuliariosios pasiskirstymo funkcijų tiesine kombinacija.

Jei daugiamatė pasiskirstymo funkcija yra diskreti, tai ir jos vienamatės marginaliosios pasiskirstymo funkcijos yra diskrečios, ir atvirkščiai. Šį teiginį paliekame įrodyti skaitytojui.

Mums pravers šitokia teorema.

3 teorema. *Jei pasiskirstymo funkcija* $F_{(X_1,...,X_s)}(x_1,...,x_s)$ *yra absoliučiai tolydi, tai ir visos vienamatės marginaliosios pasiskirstymo funkcijos* $F_{X_k}(x_k)$ $(k=1,...,s)$ *yra absoliučiai tolydžios.*

Į r o d y m a s. Iš absoliutaus tolydumo apibrėžimo išplaukia, jog egzistuoja tokia integruojama funkcija p, kad

$$F_{(X_1,...,X_s)}(x_1,...,x_s) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_s} p(u_1,...,u_s)du_1...du_s.$$

Įrodysime, pavyzdžiui, kad F_{X_1} yra absoliučiai tolydi. Remiantis Fubinio[1] teorema,

$$\varphi(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} p(u_1,u_2,...,u_s)du_2...du_s$$

yra integruojama kintamojo u_1 funkcija ir

$$F_{X_1}(x_1) = F_{(X_1,...,X_s)}(x_1,\infty,...,\infty) = \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(u_1)du_1. \ \Box$$

Tarp daugiamačių absoliučiai tolydžių pasiskirstymų labai svarbus normalusis pasiskirstymas. Tarkime, kad $Q(x) = xAx'$ yra teigiamai apibrėžta s kintamųjų kvadratinė forma su matrica A. Čia vektoriumi-eilute laikoma vienos eilutės matrica, $'$ reiškia transponavimą; matrica iš vieno elemento sutapdinama su tuo elementu. Tarkime, kad $a_1,...,a_s$ yra realieji skaičiai. Apskaičiuosime integralą

$$\begin{aligned} J &= \int_{R^s} ... \int e^{-Q(x_1-a_1,...,x_s-a_s)/2}dx_1...dx_s = \\ &= \int_{R^s} e^{-(xAx')/2}dx. \end{aligned}$$

Taip parinksime ortogonalią matricą C, kad CAC' būtų diagonalioji matrica D. Jos diagonaliuosius elementus žymėsime $\sigma_1^2,...,\sigma_s^2$. Tada matricos A determinantas $|A| = |D| = \sigma_1^2,...,\sigma_s^2$. Integralo J antrojoje išraiškoje pakeisime kintamuosius $x = yC$. Tada

---

[1] Guido Fubini (1879–1943) – italų matematikas.

$$xAx' = yDy' = \sigma_1^2 y_1^2 + ... + \sigma_s^2 y_s^2$$

ir

$$J = \prod_{k=1}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_k^2 y_k^2/2} dy_k = \frac{(2\pi)^{s/2}}{|\sigma_1 ... \sigma_k|} = \frac{(2\pi)^{s/2}}{\sqrt{|A|}}.$$

Taigi

$$p(x_1, ..., x_s) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} e^{-Q(x_1 - a_1, ..., x_s - a_s)/2}$$

tenkina tankio funkcijų sąlygas. Tokios funkcijos nusakytas pasiskirstymo dėsnis yra vadinamas *s-mačiu normaliuoju.* Atsitiktinis vektorius, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, taip pat vadinamas *normaliuoju.*

Dvimačio normaliojo pasiskirstymo tankio funkciją galima užrašyti šitaip:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \Big(\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - \\ - 2\rho \frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2} \Big) \Big\};$$

čia $\sigma_1,\ \sigma_2$ – teigiami skaičiai, ρ – realusis skaičius, $|\rho| < 1$.

6. NEPRIKLAUSOMI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

Jau esame minėję, kad nepriklausomumo sąvoka yra labai svarbi tikimybių teorijoje. Praplėsime ją atsitiktiniams dydžiams, apibrėžtiems tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$.

Atsitiktiniai dydžiai $X_1, ..., X_n$ vadinami *nepriklausomais*, jei

$$(1) \qquad P(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) ... P(X_n \in B_n),$$

kokios bebūtų tiesės taškų Borelio aibės $B_1, ..., B_n$. Jei turime seką atsitiktinių dydžių $X_1, X_2, ...$, tai sakome, kad jie yra *nepriklausomi*, jei (1) lygybė yra teisinga kiekvienam natūraliajam n.

Iš apibrėžimo išplaukia, jog nepriklausomų atsitiktinių dydžių kiekvienas posistemis sudarytas taip pat iš nepriklausomų dydžių. Pakanka (1) lygybėje kai kurias Borelio aibes B_k pakeisti aibe R.

Nepriklausomumo apibrėžime atsitiktinius dydžius laikėme vienamačiais. Tačiau galima būtų imti ir atsitiktinius vektorius; tada Borelio aibes reikia imti iš atitinkamo matavimo erdvių. Mes toliau nagrinėsime tik vienamačius atsitiktinius dydžius.

Iš apibrėžimo matome, kad atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai jų generuotos σ algebros (žr. 1 ir I.12 skyrelius) yra nepriklausomos.

Atkreipsime dėmesį, kad iš atsitiktinių dydžių nepriklausomumo kas du neišplaukia jų visų nepriklausomumas.

Jei atsitiktiniai dydžiai $X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi, tai

$$P(X_1 < x_1, ..., X_n < x_n) = P(X_1 < x_1)...P(X_n < x_n),$$

kokie bebūtų realieji skaičiai $x_1, ..., x_n$, t. y. atsitiktinio vektoriaus $(X_1, ..., X_n)$ pasiskirstymo funkcija yra lygi jo vienamačių marginaliųjų pasiskirstymo funkcijų sandaugai

$$F_{(X_1,...,X_n)}(x_1, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n). \tag{2}$$

Ši lygybė gaunama, nepriklausomumo apibrėžime paėmus Borelio aibes pavidalo $(-\infty, x_1), ..., (-\infty, x_n)$.

Teisingas ir atvirkštinis teiginys.

1 teorema. *Vienamačiai atsitiktiniai dydžiai $X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai teisinga* (2) *lygybė.*

Į r o d y m a s. Sąlygos būtinumą jau parodėme. Įrodysime jos pakankamumą. Tarkime, jog teisinga (2) lygybė. Reikia įrodyti, kad teisingos (1) lygybės, kokias bepaimtume Borelio aibes $B_1, ..., B_n$. Imkime fiksuotus $x_2, ..., x_n$ ir mačioje erdvėje $\{R, \mathcal{B}\}$ apibrėžkime du matus $Q_1(B)$ ir $Q'_1(B)$,

$$Q_1(B) = P(X_1 \in B, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n),$$
$$Q'_1(B) = P(X_1 \in B)P(X_2 < x_2, ..., X_n < x_n).$$

Abi šios aibės funkcijos iš tikrųjų yra matai, nes jos neneigiamos ir visiškai adityvios, – tai išplaukia iš tikimybinio mato P savybių. Abu matai sutampa Borelio aibėms $B = (-\infty, x_1)$, nes pirmasis pagal (2) tada lygus $P(X_1 < < x_1)P(X_2 < x_2)...P(X_n < x_n)$, o antrasis dėl tos pačios priežasties lygus $P(X_1 < x_1)P(X_1 < \infty, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n) = P(X_1 < x_1)P(X_1 < < \infty)P(X_2 < x_2)...P(X_n < x_n)$. Iš čia išplaukia, kad jie sutampa intervalams $[x'_1, x''_1)$, taigi sutampa ir aibių algebroje, sudarytoje iš disjunkčių intervalų $[x'_1, x''_1)$ baigtinių sąjungų. Todėl pagal Karateodorio[1] teoremą tie matai turi sutapti ir visoms Borelio aibėms B. Vadinasi,

$$P(X_1 \in B, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n) =$$
$$= P(X_1 \in B)P(X_1 < x_2, ..., X_n < x_n).$$

Fiksuokime $B_1 \in \mathcal{B}, x_3, ..., x_n$ ir bet kurioms Borelio aibėms B imkime

$$Q_2(B) = P(X_1 \in B_1, X_2 \in B, X_3 < x_3, ..., X_n < x_n),$$
$$Q'_2(B) = P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B)P(X_3 < x_3, ..., X_n < x_n).$$

[1] Constantis Carathéodory (1873–1950) – vokiečių matematikas.

Vėl turime neneigiamas ir visiškai adityvias aibės funkcijas. Analogiškai įrodome, jog jos sutampa Borelio aibėms $B = (-\infty, x_2)$ ir intervalų $[x'_2, x''_2)$ baigtinėms sąjungoms, todėl sutampa ir bet kokioms Borelio aibėms. Vėl gauname

$$\begin{aligned} &P(X_1 \in B_1, X_2 \in B, X_3 < x_3, ..., X_n < x_n) = \\ &= P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B)P(X_3 < x_3, ..., X_n < x_n). \end{aligned}$$

Taip samprotaudami toliau, gauname (1) lygybę. □

Panagrinėsime diskrečiuosius ir absoliučiai tolydžius nepriklausomus atsitiktinius dydžius. Jų nepriklausomumą galima nusakyti ir paprasčiau.

2 teorema. *Tarkime, kad $X_1, ..., X_n$ yra diskretieji atsitiktiniai dydžiai ir dydžio X_k reikšmių aibė, įgyjama su tikimybe 1, yra $\{a_{kj}\}$. Tie dydžiai yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai*

$$\begin{aligned} &P(X_1 = a_{1j_1}, ..., X_n = a_{nj_n}) = \\ &= P(X_1 = a_{1j_1})...P(X_n = a_{nj_n}) \end{aligned} \tag{3}$$

visoms galimoms $j_1, ..., j_n$ reikšmėms.

Į r o d y m a s. Sąlygos būtinumas trivialus, nes aibės iš vieno elemento yra Borelio aibės.

Sąlygos pakankamumui įrodyti imkime bet kurias erdvės R Borelio aibes $B_1, ..., B_n$. Iš tikimybės adityvumo ir (3) lygybės gauname

$$\begin{aligned} &P(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n) = \\ &= \sum_{\substack{a_{1j_1} \in B_1 \\ \cdots \\ a_{nj_n} \in B_n}} P(X_1 = a_{1j_1}, ..., X_n = a_{nj_n}) = \\ &= \sum_{\substack{a_{1j_1} \in B_1 \\ \cdots \\ a_{nj_n} \in B_n}} P(X_1 = a_{1j_1})...P(X_n = a_{nj_n}) = \\ &= \sum_{a_{1j_1} \in B_1} P(X_1 = a_{1j_1})... \sum_{a_{nj_n} \in B_n} P(X_n = a_{nj_n}) = \\ &= P(X_1 \in B_1)...P(X_n \in B_n). \ \square \end{aligned}$$

3 teorema. *Jei $X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi absoliučiai tolydūs atsitiktiniai dydžiai su tankio funkcijomis $p_{X_1}, ..., p_{X_n}$, tai ir atsitiktinis vektorius $(X_1, ..., X_n)$ yra absoliučiai tolydus, o jo tankio funkcija $p_{(X_1,...,X_n)}$ beveik visur lygi sandaugai*

$$p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_n}(x_n).$$

Į r o d y m a s. Iš dydžių nepriklausomumo išplaukia

$$\begin{aligned}
&F_{(X_1,...,X_n)}(x_1,...,x_n) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n) = \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} p_{X_1}(u_1)du_1 ... \int_{-\infty}^{x_n} p_{X_n}(u_n)du_n = \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_{X_1}(u_1)...p_{X_n}(u_n)du_1...du_n. \ \square
\end{aligned}$$

4 teorema. *Jei atsitiktinis vektorius $(X_1, ..., X_n)$ yra absoliučiai tolydus su tankio funkcija $p_{(X_1,...,X_n)}$, o $p_{X_1}, ..., p_{X_n}$ – jo komponentų tankio funkcijos (jos, kaip matėme, egzistuoja) ir beveik visur teisinga lygybė*

$$p_{(X_1,...,X_n)}(x_1,...,x_n) = p_{X_1}(x_1)...p_{X_n}(x_n),$$

tai atsitiktiniai dydžiai $X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi.

Į r o d y m a s. Iš teoremos sąlygos ir Fubinio teoremos išplaukia

$$\begin{aligned}
&F_{(X_1,...,X_n)}(x_1,...,x_n) = \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_{(X_1,...,X_n)}(u_1,...,u_n)du_1...du_n = \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_{X_1}(u_1),...,p_{X_n}(u_n)du_1...du_n = \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} p_{X_1}(u_1)du_1 ... \int_{-\infty}^{x_n} p_{X_n}(u_n)du_n = \\
&= F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n). \ \square
\end{aligned}$$

Iš 3 ir 4 teoremų išplaukia, kad atsitiktinio vektoriaus, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, aprašytą 5 skyrelyje, komponentai yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai atitinkamos kvadratinės formos matrica yra diagonalioji.

Matėme, kad atsitiktinių dydžių Borelio funkcijos taip pat yra atsitiktiniai dydžiai. Intuityviai jaučiame, kad nepriklausomų atsitiktinių dydžių funkcijos turėtų būti nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Ir iš tikrųjų taip yra.

5 teorema. *Jei $X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, o $\varphi_1, ..., \varphi_n$ – Borelio funkcijos, tai atsitiktiniai dydžiai $\varphi_1(X_1), ..., \varphi_n(X_n)$ yra taip pat nepriklausomi.*

Į r o d y m a s. Imkime bet kurias Borelio aibes $B_1, ..., B_n$. Prisiminę, kad $\varphi_k^{-1}(B_k)$ taip pat yra Borelio aibė, iš nepriklausomų dydžių apibrėžimo gauname

$$\begin{aligned}&P\big(\varphi_1(X_1) \in B_1, ..., \varphi_n(X_n) \in B_n\big) = \\ &= P\big(X_1 \in \varphi_1^{-1}(B_1), ..., X_n \in \varphi_n^{-1}(B_n)\big) = \\ &= P\big(X_1 \in \varphi_1^{-1}(B_1)\big)...P\big(X_n \in \varphi_n^{-1}(B_n)\big) = \\ &= P\big(\varphi_1(X_1) \in B_1\big)...P\big(\varphi_n(X_n) \in B_n\big). \ \square\end{aligned}$$

Išvada. *Jei $X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, a_k ir b_k $(k = 1, ..., n)$ – konstantos, tai atsitiktiniai dydžiai $a_k X_k + b_k$ $(k = 1, ..., n)$ yra taip pat nepriklausomi.*

Į r o d y m a s. $a_k x + b_k$ yra Borelio funkcijos. $\square$

Apibendrinsime 5 teoremą.

6 teorema. *Jei $X_{11}, ..., X_{1n_1}, ..., X_{s_1}, ..., X_{sn_s}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $\varphi_1(x_1, ..., x_{n_1}), ..., \varphi_s(x_1, ..., x_{n_s})$ – realiosios Borelio funkcijos, tai atsitiktiniai dydžiai*

$$\varphi_1(X_{11}, ..., X_{1n_1}), ..., \varphi_s(X_{s1}, ..., X_{sn})$$

yra taip pat nepriklausomi.

Į r o d y m a s analogiškas 5 teoremos įrodymui. $\square$

5 ir 6 teoremose dydžiai X_k buvo laikomi vienamačiais. Tačiau teoremos ir jų įrodymai yra teisingi, jei X_k laikysime nebūtinai to paties matavimų skaičiaus atsitiktiniais vektoriais; suprantama, Borelio funkcija φ_k turi būti kelių kintamųjų funkcija (tiek kintamųjų, kokio matavimų skaičiaus yra vektorius X_k).

Taip pat intuityviai aišku, kad konstanta (ją galima laikyti atsitiktiniu dydžiu) nepriklauso nuo jokio atsitiktinio dydžio reikšmių.

7 teorema. *Konstanta ir bet koks atsitiktinis dydis yra nepriklausomi.*

Į r o d y m a s. Tarkime, kad X yra atsitiktinis dydis, o $Y = c$ – konstanta. Paėmę bet kurias Borelio aibes B_1, B_2, turime

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = \begin{cases} P(X \in B_1), & \text{kai } c \in B_2, \\ 0, & \text{kai } c \notin B_2, \end{cases}$$

ir

$$P(Y \in B_2) = \begin{cases} 1, & \text{kai } c \in B_2, \\ 0, & \text{kai } c \notin B_2. \end{cases}$$

Matome, kad abiem atvejais

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2). \ \square$$

7. ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ VIDURKIAI

Atsitiktinio dydžio pasiskirstymą nusako jo indukuotas matas arba pasiskirstymo funkcija. Tačiau praktiškai dažnai pakanka mažiau pilnų suminių atsitiktinio dydžio charakteristikų. Viena iš jų yra vidurkis.

Pirmiausia pateiksime kai kuriuos intuityvius samprotavimus, po to formaliai apibrėšime atsitiktinio dydžio vidurkį. Išnagrinėsime pavyzdį. Tarkime, kad metame lošimo kauliuką N kartų. Iš tikimybės statistinės interpretacijos išplaukia, kad akučių skaičius k $(k = 1, ..., 6)$ atsivers maždaug $N/6$ kartų. Todėl bendras atsivertusių akučių skaičius po N metimų maždaug yra lygus

$$1 \cdot \frac{N}{6} + 2 \cdot \frac{N}{6} + 3 \cdot \frac{N}{6} + 4 \cdot \frac{N}{6} + 5 \cdot \frac{N}{6} + 6 \cdot \frac{N}{6}.$$

Vienam metimui vidutiniškai teks

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

akučių.

Nagrinėkime bendresnį pavyzdį. Sakykime, X yra diskretusis atsitiktinis dydis, įgyjantis baigtinį skaičių skirtingų reikšmių $x_1, ..., x_r$ su atitinkamomis tikimybėmis $p_1, ..., p_r$. Stebime jį N kartų. Pagal statistinę tikimybės interpretaciją žinome, kad vidutiniškai Np_1 kartų stebėsime reikšmę x_1, Np_2 kartų – reikšmę x_2 ir t. t. Visų stebėtų reikšmių suma bus vidutiniškai lygi

$$\sum_{k=1}^{r} x_k N p_k,$$

ir vienam stebėjimui teks

$$\sum_{k=1}^{r} x_k p_k.$$

Šie heuristiniai samprotavimai leidžia atsitiktinio dydžio vidutine reikšme arba vidurkiu laikyti sumą

$$MX = \sum_{k=1}^{r} x_k p_k.$$

Dažnai MX dar vadinamas matematine viltimi. Tai – istorinis terminas, plačiai paplitęs ir šiandieninėje literatūroje.

Prisiminę Lebego integralo apibrėžimą, atsitiktinio dydžio X vidurkį galime užrašyti šitaip:

$$MX = \sum_{k=1}^{r} x_k P(X = x_k) = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega).$$

Dabar pateiksime bendrą atsitiktinio dydžio vidurkio apibrėžimą. Atsitiktinio dydžio X, apibrėžto tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, *vidurkiu* vadinsime integralą

$$MX = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega),$$

jei X yra integruojama funkcija. Integralas gali turėti prasmę ir tada, kai funkcija X yra mati, tačiau nėra integruojama (tik kvaziintegruojama), t. y. tada, kai vienas iš integralų

$$\int_\Omega X^+(\omega)dP, \quad \int_\Omega X^-(\omega)dP$$

nėra baigtinis. Tuo atveju kartais kalbama apie atsitiktinio dydžio apibendrintąjį vidurkį. Tačiau mes laikysime, kad vidurkis egzistuoja tik tada, kai abu tie integralai yra baigtiniai, t. y. kai X yra integruojama.

Atsitiktinio dydžio vidurkį galima užrašyti ir remiantis Lebego–Styltjeso integralu. Jei P_X yra atsitiktinio dydžio X indukuotas tikimybinis matas erdvėje $\{R, \mathcal{B}\}$, o F_X – jo pasiskirstymo funkcija, tai

$$MX = \int_R xP_X(dx) = \int_R xdF_X(x). \tag{1}$$

Funkcija X yra integruojama mato P atžvilgiu tada ir tik tada, kai funkcija x yra integruojama mato P_X atžvilgiu.

Įrodysime bendresnę teoremą.

1 teorema. *Jei φ yra reali Borelio funkcija, apibrėžta tiesėje R, o X – atsitiktinis dydis, tai*

$$\int_\Omega \varphi\big(X(\omega)\big)P(d\omega) = \int_R \varphi(x)P_X(dx) = \int_R \varphi(x)dF_X(x).$$

Abu integralai arba egzistuoja, arba neegzistuoja.

Į r o d y m a s. 1. Pirmiausia įrodysime atskirą teoremos atvejį, kai funkcija φ yra aibės $B \in \mathcal{B}$ indikatorius: $\varphi(x) = \mathbf{1}_B(x)$. Tada

$$\varphi\big(X(\omega)\big) = \mathbf{1}_{\{\omega: X(\omega) \in B\}}(\omega)$$

ir

$$\int_R \varphi(x)P_X(dx) = \int_R \mathbf{1}_B(x)P_X(dx) = P_X(B) =$$
$$= P\{\omega : X(\omega) \in B\} = \int_\Omega \varphi\big(X(\omega)\big)P(d\omega).$$

2. Tarkime dabar, kad φ yra paprastoji neneigiama Borelio funkcija. Ji yra disjunkčių Borelio aibių baigtinės sistemos indikatorių tiesinė kombinacija su neneigiamais koeficientais:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{r} c_k \mathbf{1}_{B_k}(x).$$

Kiekvienam indikatoriui taikome 1 dalyje įrodytą lygybę, padauginame iš c_k ir susumuojame. Gauname, jog teoremos lygybė teisinga ir funkcijai $\varphi(x)$.

3. Tarkime, kad $\varphi(x)$ yra neneigiama Borelio funkcija. Pažymėję

$$A_{nk} = \{x : \frac{k-1}{2^n} \leq \varphi(x) < \frac{k}{2^n}\} \ (n = 1, 2, ...; \ k = 1, 2, ..., 2^n n),$$
$$B_n = \{x : \varphi(x) \geq n\} \ (n = 1, 2, ...),$$

apibrėšime paprastąsias neneigiamas Borelio funkcijas (žr. V.7)

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n n} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{1}_{A_{nk}}(x) + \mathbf{1}_{C_n}(x).$$

Tos funkcijos yra neneigiamos ir $\varphi_n(x) \nearrow \varphi(x)$. Tada ir $\varphi_n\big(X(\omega)\big) \nearrow$ $\nearrow \varphi\big(X(\omega)\big)$. Antra vertus, iš 2 įrodymo dalies išplaukia, kad

$$\int_R \varphi_n(x) P_X(dx) = \int_\Omega \varphi_n\big(X(\omega)\big) P(d\omega).$$

Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, pagal neneigiamų mačių funkcijų integralo apibrėžimą gauname

$$\int_R \varphi(x) P_X(dx) = \int_\Omega \varphi\big(X(\omega)\big) P(d\omega).$$

4. Jei φ yra Borelio funkcija, galinti įgyti bet kurio ženklo reikšmes, tai pagal 3 įrodymo dalį

$$\int_R \varphi^+(x) P_X(dx) = \int_\Omega \varphi^+\big(X(\omega)\big) P(d\omega),$$
$$\int_R \varphi^-(x) P_X(dx) = \int_\Omega \varphi^-\big(X(\omega)\big) P(d\omega).$$

Atėmę lygybes panariui, gauname reikiamą lygybę. □

Teoremos lygybę galime laikyti kintamojo keitimo Lebego integrale formule.

Iš čia išplaukia (1) lygybė ir jos apibendrinimas

$$M\varphi(X) = \int_R \varphi(x) P_X(dx) = \int_R \varphi(x) dF_X(x),$$

jei tik funkcija φ yra integruojama mato P_X atžvilgiu.

Atsitiktinio dydžio vidurkis turi paprastą "mechaninę" prasmę. Jei tikimybinį pasiskirstymą vaizduotumėmės kaip vienetinės masės pasiskirstymą tiesėje, tai atsitiktinio dydžio vidurkis reikštų tos masės svorio centro koordinatę.

Jei X yra diskretusis atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes $\{x_k\}$ su atitinkamomis tikimybėmis $\{p_k\}$, tai, apibendrindami skyrelio pradžioje pateiktą formulę, gauname

$$MX = \sum_k x_k p_k.$$

Jei pastaroji eilutė yra begalinė, tai ji turi absoliučiai konverguoti.

Kai atsitiktinis dydis yra absoliučiai tolydus, tai jo vidurkį taip pat galime užrašyti papraščiau, vietoj Lebego–Styltjeso integralo paėmę paprastąjį Lebego.

2 teorema. *Jei φ yra Borelio funkcija, apibrėžta tiesėje R, o X – atsitiktinis dydis, turintis tankį p_X, tai*

$$\int_R \varphi(x) P_X(dx) = \int_R \varphi(x) p_X(x)dx.$$

Pastarasis integralas yra paprastasis Lebego. Abu integralai kartu egzistuoja arba neegzistuoja.

Į r o d y m a s. Iš 5.2 teoremos turime, kad

$$\int_B p_X(x)dx = P(X \in B) = P_X(B),$$

kai B yra bet kuri Borelio aibė. Vadinasi, mūsų teorema yra teisinga, kai Borelio funkcija $\varphi(x) = \mathbf{1}_B(x)$.

Toliau teoremos įrodymas niekuo nesiskiria nuo 1 teoremos įrodymo. Pirmiausia ją įrodome indikatorių tiesinėms kombinacijoms, t. y. paprastosioms funkcijoms, po to neneigiamoms Borelio funkcijoms ir pagaliau bet kurio ženklo Borelio funkcijoms. Įrodymo detales paliekame skaitytojui. □

Iš šios teoremos išplaukia, kad absoliučiai tolydaus integruojamo dydžio su tankio funkcija p_X vidurkis yra

$$MX = \int_R x p_X(x)dx.$$

Teisinga ir bendresnė formulė

$$M\varphi(X) = \int_R \varphi(x) p_X(x)dx,$$

kai $\varphi\big(X(\omega)\big)$ yra integruojama funkcija.

1 p a v y z d y s. Rasime binominio atsitiktinio dydžio X vidurkį. Priminsime (žr. 2.2 pavyzdį), kad tada atsitiktinis dydis įgyja reikšmes $0, 1, ..., n$ $(n \geq 1)$ su tikimybėmis

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \; 0 \leq p \leq 1, \; q = 1 - p.$$

Kadangi X yra diskretus, tai

$$MX = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} =$$
$$= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^j q^{n-1-j} = np(p+q)^{n-1} = np.$$

2 p a v y z d y s. Apskaičiuosime atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal Puasono dėsnį (žr. 5.2 pavyzdį), vidurkį. Šis dydis įgyja reikšmes 0, 1, 2, ... su tikimybėmis

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};$$

čia λ – teigiama konstanta. Atsitiktinis dydis yra diskretus. Todėl

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda.$$

Matome, kad parametras λ turi gana paprastą tikimybinę prasmę – jis yra atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal Puasono dėsnį, vidurkis.

3 p a v y z d y s. Nagrinėsime diskretųjį atsitiktinį dydį, įgyjantį reikšmes $(-1)^{k-1} 3^k / k$ su tikimybėmis $2 \cdot 3^{-k}$ $(k = 1, 2, ...)$. Šis dydis vidurkio neturi, nors eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 3^k}{k} \cdot \frac{2}{3^k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

ir konverguoja. Mat, pastaroji eilutė nekonverguoja absoliučiai

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k} \cdot \frac{2}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} = \infty.$$

4 p a v y z d y s. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį (žr. 5.6 pavyzdį) su tankio funkcija

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Bigl(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\Bigr), \; a \in R, \; \sigma > 0.$$

Jo vidurkis egzistuoja, nes funkcija $xp(x)$ yra integruojama Lebego prasme. Pakeitę integrale

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\Big(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\Big) dx$$

kintamąjį x nauju kintamuoju $y = (x-a)/\sigma$, gauname

$$MX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + a) e^{-y^2/2} dy =$$
$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2/2} dy + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy.$$

Pirmasis integralas lygus nuliui, nes pointegralinė funkcija yra nelyginė. Antrasis integralas, kaip žinome iš I.15.3 lemos, lygus $(2\pi)^{1/2}$. Todėl $MX = a$. Vadinasi, parametro a tikimybinė prasmė – dydžio X vidurkis.

5 p a v y z d y s. Imsime atsitiktinį dydį, pasiskirsčiusį pagal Koši dėsnį (žr. 5.10 pavyzdį) su tankiu

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Šiuo atveju

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx = \infty.$$

Todėl atsitiktinis dydis vidurkio neturi.

8. ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ VIDURKIŲ SAVYBĖS

Ankstesniame skyrelyje apibrėžėme atsitiktinio dydžio X su pasiskirstymo funkcija F_X vidurkį. Tai – integralas

$$\int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) = \int_R x P_X(dx) = \int_R x dF_X(x);$$

čia funkcija X yra integruojama pagrindinio tikimybinio mato P atžvilgiu, arba (tai yra tas pats) funkcija x yra integruojama mato P_X atžvilgiu. Iš integralo savybių išplaukia pagrindinės vidurkio savybės. Svarbiausias iš jų išvardysime.

1. Jei atsitiktinis dydis X su tikimybe 1 lygus konstantai c, t. y. $P(X = c) = 1$, tai

$$MX = c.$$

2. Jei X yra neneigiamas atsitiktinis dydis, turintis vidurkį, tai

$$MX \geq 0.$$

3. Jei atsitiktinis dydis X turi vidurkį, o c yra baigtinė konstanta, tai cX taip pat turi vidurkį ir

$$M(cX) = cMX.$$

4. Jei atsitiktiniai dydžiai X, Y turi vidurkius, tai ir jų suma $X + Y$ turi vidurkį ir

$$M(X + Y) = MX + MY.$$

5. Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y turi vidurkius ir $X \le Y$, tai ir

$$MX \le MY.$$

Atskiru atveju, jei $a \le X \le b$, tai ir

$$a \le MX \le b.$$

6. Jei X turi vidurkį, tai

$$|MX| \le M|X|.$$

7. Jei X ir $Y \ge 0$ yra atsitiktiniai dydžiai, $|X| \le Y$ ir Y turi vidurkį, tai ir X turi vidurkį ir

$$|MX| \le MY.$$

8. Jei X yra neneigiamas atsitiktinis dydis, turįs vidurkį $MX = 0$, tai $P(X = 0) = 1$.

Ir kitas V.9 skyrelio teoremas atitinka vidurkio savybės, bet jų čia neminėsime.

Atsitiktinių dydžių vidurkiai turi savybių, kurios nėra tiesioginės integralo savybių išvados.

Toliau mums pravers šitokia svarbi vidurkių savybė.

Teorema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi ir turi vidurkius, tai tų dydžių sandauga XY taip pat turi vidurkį ir*

$$MXY = MX \cdot MY.$$

Į r o d y m a s. 1. Tarkime, kad X ir Y yra paprastosios (neneigiamos) funkcijos, įgyjančios reikšmes $\{x_k\}$ ir $\{y_l\}$. Tada XY yra taip pat paprastoji funkcija. Iš vidurkio apibrėžimo ir 6.2 teoremos išplaukia įrodomoji lygybė

$$\begin{aligned} MXY &= \sum_{k,l} x_k y_l P(X = x_k,\ Y = y_l) = \\ &= \sum_{k,l} x_k y_l P(X = x_k) P(Y = y_l) = \\ &= \sum_k x_k P(X = x_k) \sum_l y_l P(Y = y_l) = MX \cdot MY. \end{aligned}$$

2. Sakykime, X ir Y yra neneigiami. Pažymėkime $(n = 1, 2, ...)$ (žr. V. 7)

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{, kai } \frac{k-1}{2^n} \le x < \frac{k}{2^n} \ (k = 1, 2, ..., 2^n n), \\ n & \text{, kai } x \ge n. \end{cases}$$

Tada $X_n(\omega) = \Psi_n\big(X(\omega)\big)$ ir $Y_n(\omega) = \Psi_n\big(Y(\omega)\big)$ pagal 6.5 teoremą yra nepriklausomi. Todėl pagal 1 įrodymo dalį

$$MX_nY_n = MX_n \cdot MY_n. \tag{1}$$

Antra vertus, $X_n(\omega) \nearrow X(\omega)$, $Y_n(\omega) \nearrow Y(\omega)$. Todėl $X_n(\omega)Y_n(\omega) \nearrow$ $\nearrow X(\omega)Y(\omega)$. Pagal neneigiamų mačių funkcijų integralo apibrėžimą iš (1) gauname, kad MXY egzistuoja ir

$$MXY = MX \cdot MY.$$

3. Tirsime atsitiktinius dydžius X, Y, galinčius įgyti bet kurio ženklo reikšmes. Pažymėkime, kaip paprastai, $X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega)$, $Y(\omega) =$ $= Y^+(\omega) - Y^-(\omega)$. Atsitiktiniai dydžiai $X^\pm$ ir $Y^\pm$ yra neneigiami ir (kaip X ir Y Borelio funkcijos) nepriklausomi. Be to, egzistuoja vidurkiai $MX^\pm, MY^\pm$. Iš vidurkio adityvumo ir 2 įrodymo dalies gauname

$$\begin{aligned} MXY = M(X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-) = \\ &= MX^+Y^+ - MX^+Y^- - MX^-Y^+ + MX^-Y^- = \\ &= MX^+ \cdot MY^+ - MX^+ \cdot MY^- - MX^- \cdot MY^+ + \\ &+ MX^- \cdot MY^- = (MX^+ - MX^-)(MY^+ - MY^-) = MX \cdot MY. \end{aligned}$$

Kartu išplaukia ir vidurkio MXY egzistavimas. □

Ši teorema nėra apverčiama: galima rasti ir priklausomus atsitiktinius dydžius, turinčius vidurkius bei tenkinančius sąlygą $MXY = MX \cdot MY$. Tai išplaukia ir iš šitokio pavyzdžio. Imkime du nepriklausomus atsitiktinius dydžius X ir Z. Tarkime, kad egzistuoja MX^2 ir MZ. 9 skyrelyje parodysime, kad tada egzistuoja ir MX. Be to, tarkime, kad $MX = MZ = 0$. Pažymėkime $Y = XZ$. Tada, aišku, dydžiai X ir Y nėra nepriklausomi (išskyrus trivialius atvejus, pvz., kai X yra konstanta). Tačiau

$$MXY = MX^2Z = MX^2 \cdot MZ = 0 = MX \cdot MY.$$

Baigdami šį skyrelį, pastebėsime, kad simetriškų integruojamų atsitiktinių dydžių vidurkiai yra lygūs 0. Iš tikrųjų, jei atsitiktinis dydis X turi vidurkį ir yra simetriškas, tai visoms $B \in \mathcal{B}$

$$P_X(B) = P_{-X}(B)$$

ir

$$MX = \int_R xP_X(dx) = \int_R xP_{-X}(dx) = M(-X) = -MX.$$

Tačiau $MX = -MX$ tada ir tik tada, kai $MX = 0$.

9. MOMENTAI IR KITOS SKAITINĖS CHARAKTERISTIKOS

Atsitiktinio dydžio X k-osios eilės, arba tiesiog k-uoju, *momentu* (k – sveikasis neneigiamas skaičius) vadiname jo k-ojo laipsnio vidurkį

$$MX^k = \int_\Omega X^k(\omega)P(d\omega),$$

jei tik X^k yra integruojama funkcija. Ir čia laikome $0^\circ = 1$. Pasinaudoję 7.1 teorema, k-ąjį momentą galime užrašyti šitaip:

$$MX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P_X(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_X(x).$$

Aišku, nulinės eilės momentas lygus 1. Kaip žinome, funkcija X_k yra integruojama tada ir tik tada, kai jos absoliutusis didumas yra integruojamas, t. y. kai yra baigtinis integralas

$$M|X|^k = \int_\Omega |X(\omega)|^k P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF_X(x).$$

Pastarasis integralas yra vadinamas atsitiktinio dydžio X k-osios eilės, arba tiesiog k-uoju, *absoliučiuoju momentu.* Šiuo atveju k gali būti ne tik sveikasis, bet ir bet kuris teigiamas skaičius.

Jei egzistuoja k-osios eilės momentas, tai egzistuoja ir visi žemesnių eilių momentai. Iš tikrųjų, jei $0 \le r < k$, tai

$$\int_\Omega |X(\omega)|^r P(d\omega) = \int_{|X(\omega)|\le 1} |X(\omega)|^r P(d\omega) +$$
$$+ \int_{|X(\omega)|>1} |X(\omega)|^r P(d\omega) \le \int_{|X(\omega)|\le 1} P(d\omega) +$$
$$+ \int_{|X(\omega)|>1} |X(\omega)|^k P(d\omega) \le 1 + M|X|^k.$$

Tarkime, kad egzistuoja atsitiktinio dydžio vidurkis MX. Tada

$$\begin{aligned} M(X-MX)^k &= \int_\Omega \big(X(\omega)-MX\big)^k P(d\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-MX)^k dF_X(x) \end{aligned}$$

yra vadinamas atsitiktinio dydžio X *k-osios eilės*, arba *k-uoju, centriniu momentu.* Jis egzistuoja tada ir tik tada, kai egzistuoja *k-asis centrinis absoliutusis momentas*

$$\begin{aligned} M|X-MX|^k &= \int_\Omega |X(\omega)-MX|^k P(d\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x-MX|^k dF_X(x). \end{aligned}$$

MX^k ir $M|X|^k$ kartais dar vadinami *pradiniais momentais.*

Tarp pradinių ir centrinių momentų yra gana paprastas ryšys. Pradinius momentus pažymėkime raidėmis α_k, o centrinius – raidėmis μ_k. Tada

$$\mu_n = M(X-\alpha_1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \alpha_1^k \alpha_{n-k}. \tag{1}$$

Iš čia gauname

$$\begin{aligned} &\mu_0 = 1, \\ &\mu_1 = 0, \\ &\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2, \\ &\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3, \\ &\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} &\alpha_2 = \mu_2 + \alpha_1^2, \\ &\alpha_3 = \mu_3 + 3\mu_2\alpha_1 + \alpha_1^3, \\ &\alpha_4 = \mu_4 + 4\mu_3\alpha_1 - 6\mu_2\alpha_1^2 + \alpha_1^4, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Jei atsitiktinis dydis X yra diskretus ir įgyja reikšmes $\{x_n\}$ su atitinkamomis tikimybėmis $\{p_n\}$, tai

$$\begin{aligned} MX^k &= \sum_n p_n x_n^k, \\ M(X-\alpha_1)^k &= \sum_k p_n (x_n - \alpha_1)^k. \end{aligned}$$

Jei atsitiktinis dydis X yra absoliučiai tolydus ir jo tankio funkcija yra p_X, tai

$$MX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_X(x)dx,$$

$$M(X-\alpha_1)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha_1)^k p_X(x)dx.$$

1 p a v y z d y s. Rasime atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį $N(a, \sigma^2)$, centrinius momentus

$$\mu_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx.$$

Pakeitę kintamąjį $y = (x-a)/\sigma$, turime

$$\mu_k = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^k e^{-y^2/2} dy.$$

Kai k yra nelyginis, tai $\mu_k = 0$, nes pointegralinė funkcija yra nelyginė. Apskaičiuosime μ_k, kai $k = 2n$. Pagal I.15.3 lemą

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = 1.$$

Kai $n \geq 1$, integruodami dalimis, gauname

$$\mu_{2n} = -\frac{2\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^{2n-1} de^{-y^2/2} = -\frac{2\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} y^{2n-1} e^{-y^2/2}\Big|_0^{\infty} +$$

$$+ \frac{2(2n-1)\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^{2n-2} e^{-y^2/2} dy = \sigma^2(2n-1)\mu_{2n-2}.$$

Iš šios rekurentinės formulės išplaukia

$$\mu_{2n} = \sigma^{2n}(2n-1)(2n-3)...1 = (2n-1)!!\sigma^{2n} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}\sigma^{2n}.$$

Tarkime, kad $X = (X_1, ..., X_s)$ yra atsitiktinis vektorius. Jo *k-osios* ($k = k_1 + ... + k_s$, $k_1, ..., k_s$ – sveikieji neneigiami skaičiai) *eilės*, arba *k-uoju, momentu* vadiname vidurkį

$$MX_1^{k_1}...X_s^{k_s} = \int_{\Omega} X_1^{k_1}(\omega)...X_s^{k_s}(\omega)P(d\omega) =$$

$$= \int_{R^s} x_1^{k_1}...x_s^{k_s} P_X(dx_1, ..., dx_s) = \int_R x_1^{k_1}...x_s^{k_s} dF(x_1, ..., x_s),$$

jei tik pointegralinė funkcija yra integruojama. Kai bent du iš skaičių k_j yra teigiami, kartais kalbame apie *mišrųjį* atitinkamos eilės momentą. Jei vienamačiai atsitiktiniai dydžiai $X_1, ..., X_s$ turi vidurkius, galime ieškoti centrinių momentų

$$M(X_1 - MX_1)^{k_1} ... (X_s - MX_s)^{k_s} =$$
$$= \int_\Omega \big(X_1(\omega) - MX_1\big)^{k_1} \cdots \big(X_s(\omega) - MX_s\big)^{k_s} P(d\omega).$$

Kaip ir vienamačiams dydžiams, galima įvesti ir absoliučiųjų momentų sąvokas.

1 teorema (Koši nelygybė). *Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y turi antruosius momentus, tai jų sandauga XY turi vidurkį, be to,*

$$M|XY| \le \sqrt{MX^2 \cdot MY^2}.$$

Į r o d y m a s. MXY egzistavimas ir įrodomoji nelygybė išplaukia iš V.9.13 teoremos. □

2 teorema. *Jei atsitiktinis dydis X turi r-ąjį absoliutųjį momentą ir $r \ge 1$, tai*

$$|MX|^r \le M|X|^r.$$

Į r o d y m a s. Imkime funkciją $h(x) = x^r$, kai $x \ge 0$. Jos išvestinė $h'(x) = rx^{r-1}$ yra nemažėjanti funkcija. Pagal baigtinių pokyčių teoremą

$$h(x) - h(x_0) = (x - x_0)h'(\xi);$$

čia ξ telpa tarp x_0 ir x. Teisinga nelygybė

$$h(x) - h(x_0) \ge (x - x_0)h'(x_0).$$

Iš tikrųjų, kai $x \ge x_0$, tai imame mažiausią $h'(x)$ reikšmę $h'(x_0)$, o kai $x < x_0$, tai didžiausią $h'(x_0)$. Vadinasi,

$$x^r - x_0^r \ge rx_0^{r-1}(x - x_0),$$

kai x_0 ir x yra neneigiami. Iš čia išplaukia, kad

$$|X(\omega)|^r \ge M^r|X| - rM^{r-1}|X|\big(X(\omega) - M|X|\big).$$

Pagal V.9.4 teoremą

$$M|X|^r = \int_\Omega |X(\omega)|^r P(d\omega) \geq M^r|X| +$$
$$+ rM^{r-1}|X| \int_\Omega \Big(|X(\omega) - M|X|\Big) P(d\omega) = M^r|X|. \ \square$$

3 teorema. *Jei atsitiktinis dydis X turi t-ąjį absoliutųjį momentą ir $0 < s \leq t$, tai*

$$(M|X|^s)^{1/s} \leq (M|X|^t)^{1/t}.$$

Į r o d y m a s. Paėmę $r = t/s$, taikykime 2 teoremos nelygybę atsitiktiniam dydžiui $|X|^s$. Gausime

$$(M|X|^s)^{t/s} \leq M(|X|^s)^{t/s} = M|X|^t. \ \square$$

Iš šios teoremos išplaukia nelygybių serija

$$M|X| \leq (MX^2)^{1/2} \leq (M|X|^3)^{1/3} \leq ... \leq (M|X|^n)^{1/n},$$

jei tik egzistuoja n-asis momentas.

Keletą momentų panagrinėsime smulkiau. Kaip matėme 7 skyrelyje, pirmasis momentas apibūdina atsitiktinio dydžio vidutinę reikšmę. Antrasis centrinis momentas

$$M(X - MX)^2 = \int_\Omega (X - MX)^2 P(d\omega) = \int_R (x - MX)^2 dF_X(x)$$

apibūdina atsitiktinio dydžio X reikšmių išsibarstymą. Todėl tas momentas vadinamas *dispersija* (nuo lotynų kalbos žodžio *dispergere* – išsklaidyti, išbarstyti) ir žymimas DX. Kaip žinome (žr. (1)), ją galima užrašyti ir šitaip:

$$DX = MX^2 - M^2X.$$

Toks užrašas kartais patogesnis. Dispersijos, kaip ir vidurkio, "mechaninė" prasmė yra paprasta. Jei tikimybinį pasiskirstymą vaizduotumėmės kaip vienetinės masės pasiskirstymą tiesėje, tai dispersija reikštų tos masės inercijos momentą.

Dispersiją galima apibrėžti ir kitaip. Pasirodo, ji lygi

$$\min_{a \in R} M(X - a)^2.$$

Iš tikrųjų iš tapatybės

$$M(X - a)^2 = MX^2 + (a^2 - 2aMX) = MX^2 + (a - MX)^2 - M^2X$$

išplaukia, kad $M(X - a)^2$ minimumas gaunamas tada, kai $a = MX$, ir todėl

$$\min_a M(X-a)^2 = MX^2 - M^2X.$$

Aritmetinė kvadratinės šaknies iš dispersijos reikšmė $\sqrt{DX}$ yra vadinama atsitiktinio dydžio X *standartiniu nuokrypiu* arba tiesiog *standartu*.

2 p a v y z d y s. Tarkime, kad X yra atsivertusių akučių skaičius, metus lošimo kauliuką. Kaip matėme 7 skyrelyje, $MX = 7/2$. Dydžio X^2 vidurkis

$$MX^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

Todėl

$$DX = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

3 p a v y z d y s. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal binominį dėsnį (žr. 2.2 pvz.). Tada, kaip matėme 7 skyrelyje, $MX = np$. Apskaičiuosime

$$MX^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Pertvarkysime šį reiškinį, laikydami $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} MX^2 &= \sum_{k=1}^{n} [1 + (k-1)] \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} + \\ &+ n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k} = \\ &= np(p+q)^{n-1} + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = \\ &= np + n(n-1)p^2 = n^2p^2 + npq. \end{aligned}$$

Vadinasi, $DX = npq$. Kai $n = 1$,

$$DX = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q - p^2 = p - p^2 = pq.$$

4 p a v y z d y s. Sakykime, dydis x pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį su parametru λ (žr. 5.2 pvz.). Kaip jau apskaičiavome 7 skyrelyje, $MX = \lambda$. Taigi

$$\begin{aligned} MX^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} [1 + (k-1)] \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} + \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

Todėl $DX = \lambda$.

5 p a v y z d y s. Šio skyrelio pradžioje (1 pvz.) jau esame apskaičiavę, kad atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį $N(a, \sigma^2)$, dispersija yra σ^2.

4 teorema. *Tarkime, kad atsitiktinis dydis X turi vidurkį a. Jo dispersija $DX = 0$ tada ir tik tada, kai X su tikimybe 1 yra lygus konstantai a:*

$$P(X = a) = 1.$$

Į r o d y m a s. Pakankamumas yra trivialus. Būtinumas išplaukia iš V.9.9 teoremos, nes iš $M(X - a)^2 = 0$ gauname $P(X - a \neq 0) = 0$. $\square$

5 teorema. *Jei c – reali konstanta, o X – bet koks atsitiktinis dydis, turintis dispersiją, tai cX taip pat turi dispersiją ir*

$$DcX = c^2 DX.$$

Į r o d y m a s išplaukia iš lygybių

$$\begin{aligned} DcX = M(cX - McX)^2 = Mc^2(X - MX)^2 = \\ = c^2 M(X - MX)^2 = c^2 DX. \square \end{aligned}$$

6 teorema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y turi dispersijas, tai ją turi ir atsitiktinis dydis $X + Y$ ir*

$$D(X + Y) = DX + DY + 2M(X - MX)(Y - MY).$$

Į r o d y m a s. $D(X+Y) = M[(X+Y) - M(X+Y)]^2 = M[(X - MX) + (Y - MY)]^2 = M(X - MX)^2 + M(Y - MY)^2 + 2M(X - MX)(Y - MY)$. Atsitiktinio dydžio $X + Y$ dispersijos egzistavimas išplaukia iš 1 teoremos. $\square$

Dydis $M(X - MX)(Y - MY) = MXY - MX \cdot MY$ yra vadinamas atsitiktinių dydžių X ir Y *kovariacija* ir žymimas $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Atsitiktinio vektoriaus $(X_1, ..., X_s)$ *kovariacijų matrica* vadiname matricą

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathrm{cov}(X_1, X_1) & \cdots & \mathrm{cov}(X_1, X_s) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{cov}(X_s, X_1) & \cdots & \mathrm{cov}(X_s, X_s), \end{array} \right\|,$$

jei tik atitinkamos kovariacijos egzistuoja.

Panagrinėsime kovariacijų savybes.

7 teorema. *Jei X ir Y – atsitiktiniai dydžiai, turį antruosius momentus, o c – konstanta, tai teisingos lygybės*

$$\begin{aligned}&\operatorname{cov}(X, X) = DX,\\&\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X),\\&\operatorname{cov}(cX, Y) = c\operatorname{cov}(X, Y),\\&\operatorname{cov}(X + c, Y) = \operatorname{cov}(X, Y).\end{aligned}$$

Į r o d y m a s. Tų lygybių įrodymas yra tiesioginė išvada iš kovariacijos apibrėžimo ir vidurkių savybių. Įrodysime nebent ketvirtąją savybę. Turime

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X + c, Y) &= M(X + c - M(X + c))(Y - MY) =\\&= M(X - MX)(Y - MY) = \operatorname{cov}(X, Y). \ \Box\end{aligned}$$

Remdamiesi kovariacijos sąvoka, 6 teoremos lygybę galime užrašyti šitaip:

(2) $$D(X + Y) = DX + DY + 2\operatorname{cov}(X, Y).$$

Pastaroji lygybė suprastėja, kai $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. Sakome, kad dydžiai X ir Y yra *nekoreliuoti*, jei jų $\operatorname{cov}(X, Y)$ lygi 0.

1 išvada. *Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y turi dispersijas, tai*

$$D(X + Y) = DX + DY$$

tada ir tik tada, kai X ir Y yra nekoreliuoti.

Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi ir turi dispersijas, tai jie yra ir nekoreliuoti, nes tada iš nepriklausomumo ir 8 skyrelio teoremos išplaukia, kad $MXY = MX \cdot MY$. Kaip žinome iš 8 skyrelio, ši lygybė gali būti teisinga ir tada, kai dydžiai X, Y nėra nepriklausomi. Vadinasi, nekoreliuoti dydžiai gali būti ir priklausomi. Iš 1 išvados išplaukia šitokia.

2 išvada. *Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi ir turi dispersijas, tai jų sumos dispersija yra lygi tų dydžių dispersijų sumai:*

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

3 išvada. *Jei atsitiktinis dydis X turi dispersiją, o c – reali konstanta, tai $X + c$ taip pat turi dispersiją ir*

$$D(X + c) = DX.$$

8 teorema. *Jei $X_1, ..., X_n$ turi antruosius momentus, tai jų suma turi dispersiją ir*

$$D\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k,l=1}^{n} \operatorname{cov}(X_k, X_l) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} DX_k + 2 \sum_{1\le k<l\le n} \operatorname{cov}(X_k, X_l).$$

Į r o d y m a s. Trivialus. $\square$

Išvada. *Jei dydžiai $X_1, ..., X_n$ turi dispersijas ir yra kas du nekoreliuoti, tai*

$$D(X_1 + ... + X_n) = DX_1 + ... + DX_n.$$

Dviejų atsitiktinių dydžių X, Y, turinčių teigiamas dispersijas, priklausomumui apibūdinti yra įvedamas jų *koreliacijos koeficientas*

$$\varrho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}.$$

Jei dydžiai yra nekoreliuoti, tai jų koreliacijos koeficientas lygus 0. Iš 1 teoremos išplaukia, kad

$$|\varrho(X, Y)| \le 1.$$

Kaip matysime iš 9 teoremos, jis gali būti lygus ± 1. Tada dydžiai yra labai stipriai priklausomi.

9 teorema. *Koreliacijos koeficientas*

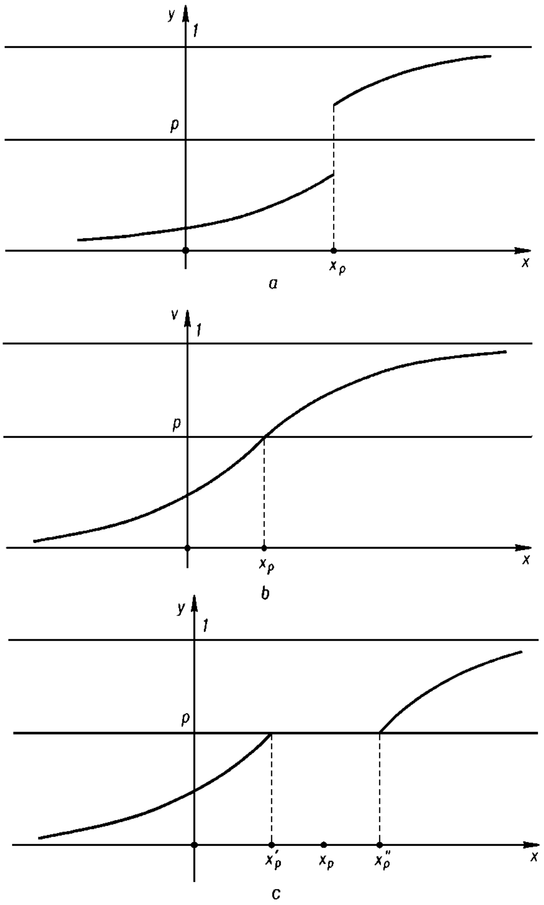
$$\varrho(X, Y) = \pm 1$$

tada ir tik tada, kai egzistuoja tokios konstantos $a \ne 0,\ b \ne 0,\ c$, kad $P(aX + bY = c) = 1$.

Į r o d y m a s. 1. Tarkime, kad $P(aX + bY = c) = 1$; čia a, b, c yra konstantos.

Apskaičiuosime koreliacijos koeficientą

$$\varrho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{\operatorname{cov}\left(X, \frac{c-aX}{b}\right)}{\sqrt{DX \cdot D\frac{c-aX}{b}}} =$$
$$= \frac{-\frac{a}{b}\operatorname{cov}(X, X)}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} DX \cdot DX}} = -\operatorname{sgn} ab.$$



24 pav.

2. Teisinga lygybė

$$D\Big(\frac{X}{\sqrt{DX}} \pm \frac{Y}{\sqrt{DY}}\Big) = 2\Big(1 \pm \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}\Big) = 2\big(1 \pm \varrho(X,Y)\big).$$

Jei $\varrho(X,Y) = \mp 1$, tai iš 4 teoremos išplaukia, kad su tikimybe 1

$$\frac{X}{\sqrt{DX}} \pm \frac{Y}{\sqrt{DY}} = const. \ \square$$

Momentai, kaip matėme, apibūdina atsitiktinius dydžius įvairiais požiūriais, tačiau jie ne visada egzistuoja. Tenka ieškoti ir kitų charakteristikų. Plačiai vartojami vadinamieji kvantiliai.

Tarkime, kad $0 < p < 1$. Atsitiktinio dydžio X lygio p *kvantiliu*, arba tiesiog p kvantiliu, vadiname skaičių x_p, tenkinantį nelygybes

$$P(X < x_p) \leq p \leq P(X \leq x_p),$$

kitaip tariant, nelygybes

$$F_X(x_p) \leq p \leq F_X(x_p + 0).$$

Kvantilis visada egzistuoja, nors ne visada yra vienareikšmiškai nusakomas. Jei (x, y) plokštumoje nubrėžtume funkcijos $y = F(x)$ grafiką ir tiesę $y = p$, tai ta tiesė su funkcijos grafiku gali neturėti nė vieno bendro taško, turėti vieną arba be galo daug – ištisą intervalą taškų (žr. 24 pav., a, b, c). Pastaruoju atveju kvantilių yra be galo daug; tada dažnai kvantiliu laikomas atkarpos $[x'_p, x''_p]$ vidurio taškas.

Kai $p = 1/2, 1/4, 3/4, q/10$ $(q = 1, ..., 9), r/100$ $(r = 1, ..., 99)$, kvantiliai vadinami atitinkamai *mediana, apatiniu kvartiliu, viršutiniu kvartiliu, q-uoju deciliu, r-uoju procentiliu.*

Mediana apibūdina atsitiktinio dydžio vidutinę reikšmę. Kai turime pakankamą skaičių kvantilių, iš jų didumo galime šį tą pasakyti apie pasiskirstymo funkciją.

10. SĄLYGINĖS TIKIMYBĖS IR SĄLYGINIAI VIDURKIAI

I.11 skyrelyje jau nagrinėjome sąlyginės tikimybės sąvoką. Priminsime ją. Imkime tikimybinę erdvę $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$. Tarkime, kad A yra bet koks atsitiktinis įvykis, o E – atsitiktinis įvykis su sąlyga $P(E) > 0$. Įvykio A sąlygine tikimybe su sąlyga E vadinome santykį

$$P(A|E) = P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}.$$

Įrodėme, kad $\{\Omega, \mathcal{A}, P_E\}$ yra tikimybinė erdvė.

Tarkime, kad $X = X(\omega)$ yra atsitiktinis dydis. Funkciją

$$F_X(x|E) = P_E(X < x) = \frac{P(\{X < x\} \cap E}{P(E)}$$

vadinsime (žr. 2 skyrelį) dydžio X *sąlygine pasiskirstymo funkcija*, o integralą

$$M_E X = M(X|E) = \int_\Omega X(\omega) P_E(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x|E),$$

jei $X(\omega)$ yra P_E-integruojama, – dydžio X *sąlyginiu vidurkiu* su sąlyga E.

1 teorema. *Jei $M(X|E)$ egzistuoja, tai*

$$M(X|E) = \int_E X(\omega) P_E(d\omega) = \frac{1}{P(E)} \int_E X(\omega) P(d\omega).$$

Į r o d y m a s. Kadangi $P_E(E^c) = 0$, tai

$$\int_{E^c} X(\omega) P_E(d\omega) = 0.$$

Iš čia išplaukia pirmoji lygybė. Jei $A \subset E,\ A \in \mathcal{A}$, tai

$$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)}{P(E)}.$$

Todėl pagal integralo apibrėžimą

$$\int_E X(\omega) P_E(d\omega) = \frac{1}{P(E)} \int_E X(\omega) P(d\omega).$$

Gavome antrąją lygybę. □

1 išvada. *Jei egzistuoja MX, tai egzistuoja ir $M(X|E)$.*

Į r o d y m a s išplaukia iš 1 teoremos antrosios lygybės. □

2 išvada. *Kiekvienam $A \in \mathcal{A}$*

$$M(\mathbf{1}_A|E) = P(A|E).$$

Į r o d y m a s. Iš 1 teoremos antrosios lygybės gauname

$$M(\mathbf{1}_A|E) = \frac{1}{P(E)} \int_E \mathbf{1}_A(\omega) P(d\omega) = \frac{1}{P(E)} \int_{A \cap E} P(d\omega) =$$
$$= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = P(A|E). \ \square$$

2 teorema. *Jei $\{E_k\}$ yra baigtinė arba skaiti kas du nesutaikomų atsitiktinių įvykių aibė,*

$$\bigcup_k E_k = \Omega,$$

$P(E_k) > 0$ visiems k ir MX egzistuoja, tai

$$MX = \sum_k P(E_k)M(X|E_k).$$

Į r o d y m a s. Iš integralo adityvumo ir 1 teoremos išplaukia, kad

$$MX = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \sum_k \int_{E_k} X(\omega)P(d\omega) =$$
$$= \sum_k P(E_k)M(X|E_k). \; \square$$

Paėmę 2 teoremoje $X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega),\ A \in \mathcal{A}$, gauname I.11.5 teoremą – pilnosios tikimybės formulę.

Mūsų tikslas – apibendrinti sąlyginio vidurkio bei sąlyginės tikimybės sąvokas. Tarkime, kad $\mathcal{E}$ yra sistemos $\mathcal{A}$ σ poalgebris. Dažnai tai bus aibių σ algebra, generuota vieno arba kelių atsitiktinių dydžių. Jei Y yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, tai visų Borelio aibių $B \in \mathcal{B}$ pirmavaizdžiai $Y^{-1}(B)$ (žr. 1 skyrelį) sudaro aibių σ algebrą, kuri yra $\mathcal{A}$ σ poalgebris. Visai taip pat kiekvienam atsitiktiniam vektoriui $Y = (Y_1, ..., Y_s)$ visų Borelio aibių $B \in \mathcal{B}^s$ pirmavaizdžiai $Y^{-1}(B)$ sudaro $\mathcal{A}$ σ poalgebrį.

Apibrėšime atsitiktinio dydžio X sąlyginį vidurkį $M(X|\mathcal{E})$ su sąlyga $\mathcal{E}$. Pirmiausia išnagrinėsime konkretų atvejį. Tarkime, kad aibę Ω suskaidėme į baigtinę arba skaičią sistemą poaibių E_k, priklausančių $\mathcal{A}$ ir kas du neturinčių bendrų elementų,

$$\bigcup_k E_k = \Omega,\ \ E_j \cap E_k = \varnothing \ (j \neq k).$$

Taip skaidyti galime, pavyzdžiui, tada, kai turime diskretųjį atsitiktinį dydį Y, įgyjantį reikšmes $\{y_k\}$, ir imame $E_k = \{\omega : Y(\omega) = y_k\}$. Pažymėkime $\mathcal{E}$ aibių E_k sistemos generuotą σ algebrą. Aišku, $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Tarkime, kad $P(E_k) >$ > 0. Apibrėšime funkciją $M(X|\mathcal{E})$ aibėje Ω, imdami

$$M(X|\mathcal{E}) = M(X|\mathcal{E})(\omega) = \sum_k M(X|E_k)\mathbf{1}_{E_k}(\omega).$$

Aišku $M(X|\mathcal{E})$ yra diskretusis atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmę $M(X|E_k)$ aibėje E_k. Jei egzistuoja MX, tai pagal 2 teoremą

$$\int_\Omega M(X|\mathcal{E})P(d\omega) = \sum_k \int_{E_k} M(X|E_k)P(d\omega) =$$
$$= \sum_k M(X|E_k)P(E_k) = MX.$$

Kadangi σ algebros $\mathcal{E}$ aibės E yra baigtinės arba skaičios aibių E_k sąjungos (įrodykite!)

$$E = \bigcup_k{}' E_k,$$

tai kiekvienai $E \in \mathcal{E}$ pagal 1 teoremą

$$\begin{aligned}
&\int_E X(\omega)P(d\omega) = \sum_k{}' \int_{E_k} X(\omega)P(d\omega) = \\
(1)\qquad &= \sum_k{}' P(E_k)M(X|E_k) = \\
&= \sum_k{}' \int_{E_k} M(X|\mathcal{E})P(d\omega) = \int_E M(X|\mathcal{E})P(d\omega).
\end{aligned}$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad funkcija $M(X|\mathcal{E})$ yra integruojama. (1) formulės pirmasis ir paskutinis integralai iš esmės skiriasi: pirmojo pointegralinė funkcija yra $\mathcal{A}$ mati, o paskutiniojo pointegralinė funkcija – $\mathcal{E}$ mati. (1) lygybė teisinga visoms $E \in \mathcal{E}$, bet gali ir nebūti teisinga, kai $E \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{E}$.

Parodysime, kad (1) lygybė tam tikra prasme aprašo funkciją $M(X|E)$ vienareikšmiškai. Tai išplauks iš šitokios lemos.

1 lema. *Jei φ yra $\mathcal{E}$ mati funkcija ir visoms $E \in \mathcal{E}$ teisinga lygybė*

$$\int_E \varphi(\omega)P(d\omega) = 0,$$

tai beveik visur mato P atžvilgiu $\varphi(\omega) = 0$, t. y.

$$P\big(\omega : \varphi(\omega) \neq 0\big) = 0.$$

Į r o d y m a s. Iš lemos sąlygų

$$\int_{\{\omega:\varphi(\omega)>0\}} \varphi(\omega)P(d\omega) = 0.$$

Pagal V.9.9 teoremą $P\big(\omega : \varphi(\omega) > 0\big) = 0$. Pakeitę funkciją $\varphi(\omega)$ funkcija $-\varphi(\omega)$, gauname $P\big(\omega : \varphi(\omega) < 0\big) = 0$. Vadinasi, $P\big(\omega : \varphi(\omega) \neq 0\big) = 0$. $\square$

Iš čia lengvai išplaukia funkcijos $M(X|\mathcal{E})$ vienareikšmiškumas. Tarkime, kad yra dvi $\mathcal{E}$ mačios funkcijos φ_1 ir φ_2, visoms $E \in \mathcal{E}$ tenkinančios lygybę

$$\int_E X(\omega)P(d\omega) = \int_E \varphi_k(\omega)P(d\omega) \ (k = 1, 2),$$

t. y.

$$\int_E \big(\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)\big) P(d\omega) = 0.$$

Pagal 1 lemą

$$P\big(\omega : \varphi_1(\omega) \neq \varphi_2(\omega)\big) = 0,$$

kitaip tariant, beveik visur mato P atžvilgiu $\varphi_1(\omega) = \varphi_2(\omega)$.

Taigi (1) lygybė aprašo ekvivalenčių mato P atžvilgiu funkcijų klasę. Ja remdamiesi, apibrėžiame sąlyginį vidurkį $M(X|\mathcal{E})$ bendruoju atveju, kai $\mathcal{E}$ yra bet kuris $\mathcal{A}$ σ poalgebris.

3 teorema. *Jei X yra integruojamas atsitiktinis dydis, o $\mathcal{E}$ – sistemos $\mathcal{A}$ σ poalgebris, tai egzistuoja vienintelė ekvivalenčių mato P atžvilgiu ir $\mathcal{E}$ mačių funkcijų $\{\varphi\}$ klasė, visoms $E \in \mathcal{E}$ tenkinanti lygybę*

$$\int_E X(\omega) P(d\omega) = \int_E \varphi(\omega) P(d\omega). \tag{2}$$

Į r o d y m a s. Nagrinėsime aibės funkciją

$$\nu(E) = \int_E X(\omega) P(d\omega),$$

apibrėžtą visoms $E \in \mathcal{E}$. Kadangi X yra integruojamas, tai ν yra baigtinė funkcija. Iš integralo savybių išplaukia visiškas jo adityvumas. Taip pat iš integralo savybių turime: jei $P(E) = 0$, tai $\nu(E) = 0$. Vadinasi, ν yra krūvis (apibendrintas matas), absoliučiai tolydus P atžvilgiu. Teoremos teiginys išplaukia iš Radono[1]–Nikodimo[2] teoremos. Funkcija φ yra Radono–Nikodimo "išvestinė" $d\nu/dP$. □

Dabar jau galime pateikti bendrą sąlyginio vidurkio $M(X|\mathcal{E})$ apibrėžimą. Jei X yra integruojamas atsitiktinis dydis, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, ir $\mathcal{E}$ yra $\mathcal{A}$ σ poalgebris, tai *sąlyginiu vidurkiu $\mathcal{E}$ atžvilgiu* vadinsime kiekvieną iš ekvivalenčių P atžvilgiu funkcijų $\varphi(\omega)$, apibrėžtų aibėje Ω, $\mathcal{E}$ mačių ir kiekvienai $E \in \mathcal{E}$ tenkinančių (2) lygybę. Dvi tokios funkcijos gali skirtis tik nulinio P mato aibėje. Žymėsime $M(X|\mathcal{E})$. Kiekvieną konkrečią nusakytos klasės funkciją vadinsime sąlyginio vidurkio versija (variantu).

Jei $A \in \mathcal{A}$, tai *sąlygine įvykio A tikimybe $\mathcal{E}$ atžvilgiu* vadinsime $P(A|\mathcal{E}) = M(\mathbf{1}_A|\mathcal{E})$.

Jei $\mathcal{E}$ yra σ algebra, generuota vienamačio ar daugiamačio atsitiktinio dydžio Y, tai sąlyginį vidurkį ir sąlyginę tikimybę $\mathcal{E}$ atžvilgiu žymėsime

$$M(X|\mathcal{E}) = M(X|Y), \;\; P(A|\mathcal{E}) = P(A|Y)$$

[1] Johann Radon (1887–1956) – austrų matematikas.

[2] Otton Nikodym (g. 1887) – lenkų matematikas.

ir vadinsime X *sąlyginiu vidurkiu* bei A *sąlygine tikimybe atsitiktinio dydžio* Y *atžvilgiu.*

Paminėsime keletą atskirų atvejų. Jei $\mathcal{E} = \{\varnothing, \Omega\}$, tai visiems $\omega \in \Omega$

$$M(X|\mathcal{E})(\omega) = MX.$$

Iš tikrųjų nesunku patikrinti, kad konstanta MX tenkina (2) lygybę, be to, $\varnothing$ yra vienintelis įvykis iš $\mathcal{E}$, turintis nulinę tikimybę.

Jei $\mathcal{E}$ yra algebra, generuota aibės E, $E \neq \varnothing$, $E \neq \Omega$, t. y. $\mathcal{E} = \{\varnothing, E, E^c, \Omega\}$, tai beveik visur P atžvilgiu

$$M(X|\mathcal{E}) = \begin{cases} M(X|E), & \text{kai } \omega \in E, \\ M(X|E^c), & \text{kai } \omega \in E^c. \end{cases}$$

4 teorema. $M\big(M(X|\mathcal{E})\big) = MX.$

Į r o d y m a s. Ši lygybė yra triviali 3 teoremos išvada, kai $E = \Omega$. □

2 lema. *Jei atsitiktinis dydis Y yra apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, o $\mathcal{A}_Y$ – to dydžio generuota σ algebra ir Z yra $\mathcal{A}_Y$ mati funkcija, tai galima rasti Borelio funkciją φ, kuriai beveik visur mato P atžvilgiu $Z(\omega) = \varphi\big(Y(\omega)\big)$.*

Į r o d y m a s. Pažymėkime H_Y klasę visų $\mathcal{A}_Y$ mačių funkcijų, o H_Y^* klasę visų funkcijų $f\big(Y(\omega)\big)$, kai f – bet kurios Borelio funkcijos.

Kiekvienai Borelio aibei $B \in \mathcal{B}$

$$\big\{\omega : f\big(Y(\omega)\big) \in B\big\} = \{\omega : Y(\omega) \in f^{-1}(B)\} \in \mathcal{A}_Y.$$

Vadinasi, $H_Y^* \subset H_Y$.

Parodysime, kad $H_Y^* = H_Y$.

Imkime bet kurią sistemos $\mathcal{A}_Y$ aibę A ir $B \in \mathcal{B}$ su sąlyga $Y^{-1}(B) = A$. Tada $\mathbf{1}_A \in H_Y^*$, nes $\mathbf{1}_A(\omega) = \mathbf{1}_B\big(Y(\omega)\big)$. Iš čia taip pat gauname, kad klasei H_Y^* priklauso ir tiesinės kombinacijos

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{1}_{A_k},$$

kai $A_k \in \mathcal{A}_Y$.

Kiekvieną $\mathcal{A}_Y$ mačią funkciją galima užrašyti šitaip:

$$Z(\omega) = \lim_{n\to\infty} Z_n(\omega);$$

čia Z_n yra atitinkamai parinktos paprastosios ($\mathcal{A}_Y$ atžvilgiu) funkcijos. Todėl pakaks įrodyti: jei $Z_n(\omega) = \varphi_n\big(Y(\omega)\big)$, φ_n – Borelio funkcijos, ir $Z(\omega) = \lim Z_n(\omega)$, tai galima rasti Borelio funkciją φ su sąlyga $Z(\omega) = \varphi\big(Y(\omega)\big)$.

Pažymėkime B_0 aibę tų realiųjų x, kuriems egzistuoja riba $\lim \varphi_n(x)$. Iš 1.3 teoremos analogo išplaukia, kad B_0 yra Borelio aibė. Pažymėkime

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lim\limits_n \varphi_n(x), & \text{kai } x \in B_0, \\ 0, & \text{kai } x \notin B_0. \end{cases}$$

Tada

$$Z(\omega) = \lim_{n\to\infty} Z_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n\bigl(Y(\omega)\bigr) = \varphi\bigl(Y(\omega)\bigr). \ \square$$

5 teorema. *Jei X ir Y yra atsitiktiniai dydžiai ir X yra integruojamas, tai viena iš sąlyginio vidurkio $M(X|Y)$ versijų yra atsitiktinio dydžio Y Borelio funkcija $\varphi(Y)$.*

Į r o d y m a s išplaukia iš 2 lemos. □

Remiantis šia teorema, funkcija $M(X|Y)$ yra pastovi beveik visur mato P prasme toms ω aibėms, kurioms $Y(\omega)$ yra pastovi.

6 teorema. *Tarkime, kad X yra integruojamas atsitiktinis dydis, nusakytas tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$. Jei $\mathcal{E}$ ir $\mathcal{F}$ yra sistemos $\mathcal{A}$ σ poalgebriai ir $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, tai beveik visur $M(X|\mathcal{E}) = M(M(X|\mathcal{F})|\mathcal{E})$.*

Į r o d y m a s. Kadangi abi įrodomosios lygybės pusės yra $\mathcal{E}$ mačios, tai reikia tik įsitikinti, kad

$$\int_E M(X|\mathcal{E})P(d\omega) = \int_E M\bigl(M(X|\mathcal{F})|\mathcal{E}\bigr)P(d\omega)$$

visoms aibėms $E \in \mathcal{E}$. Pagal apibrėžimą kiekvienai aibei $E \in \mathcal{E}$

$$\int_E M(X|\mathcal{E})P(d\omega) = \int_E X(\omega)P(d\omega).$$

Kadangi $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, tai $E \in \mathcal{F}$, vadinasi,

$$\int_E M\bigl(M(X|\mathcal{F})|\mathcal{E}\bigr)P(d\omega) = \int_E M(X|\mathcal{F})P(d\omega) = \\ = \int_E X(\omega)P(d\omega).$$

Iš čia išplaukia reikiamas teiginys. □

7 teorema. *Jei X_1 ir X_2 – integruojami atsitiktiniai dydžiai, c_1 ir c_2 – konstantos, tai beveik visur mato P prasme teisinga lygybė*

$$M(c_1X_1 + c_2X_2|\mathcal{E}) = c_1M(X_1|\mathcal{E}) + c_2M(X_2|\mathcal{E}).$$

Į r o d y m a s. Pagal apibrėžimą visoms aibėms $E \in \mathcal{E}$

$$\int_E M(c_1X_1 + c_2X_2|\mathcal{E})(\omega)P(d\omega) = \tag{3}$$
$$= \int_E \big(c_1X_1(\omega) + c_2X_2(\omega)\big)P(d\omega).$$

Visai taip pat

$$\int_E M(X_k|\mathcal{E})(\omega)P(d\omega) = \int_E X_k(\omega)P(d\omega) \ (k = 1, 2).$$

Iš čia

$$\int_E \{c_1M(X_1|\mathcal{E})(\omega) + c_2M(X_2|\mathcal{E})(\omega)\}P(d\omega) = \tag{4}$$
$$= \int_E \big(c_1X_1(\omega) + c_2X_2(\omega)\big)P(d\omega).$$

(3) ir (4) lygybių dešinės pusės sutampa. Todėl visoms $E \in \mathcal{E}$

$$\int_E M(c_1X_1 + c_2X_2|\mathcal{E})(\omega)P(d\omega) =$$
$$= \int_E \{c_1M(X_1|\mathcal{E})(\omega) + c_2M(X_2|\mathcal{E})(\omega)\}P(d\omega).$$

Pritaikę 1 lemą, gauname teoremos teiginį. □

8 teorema. *Jei X ir Y yra atsitiktiniai dydžiai, nusakyti tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, Y ir XY yra integruojami, $\mathcal{E}$ yra $\mathcal{A}$ σpoalgebris, be to, X yra $\mathcal{E}$matus, tai beveik visur $M(XY|\mathcal{E}) = XM(Y|\mathcal{E})$.*

Į r o d y m a s. Reikia įrodyti, kad visoms $E \in \mathcal{E}$

$$\int_E M(XY|\mathcal{E})(\omega)P(d\omega) = \int_E X(\omega)M(Y|\mathcal{E})(\omega)P(d\omega).$$

Pagal sąlyginio vidurkio apibrėžimą visoms $E \in \mathcal{E}$

$$\int_E M(XY|E)(\omega)P(d\omega) = \int_E X(\omega)Y(\omega)P(d\omega),$$

vadinasi, pakanka įrodyti, kad visoms $E \in \mathcal{E}$

$$\int_E X(\omega)M(Y|\mathcal{E})(\omega)P(d\omega) = \int_E X(\omega)Y(\omega)P(d\omega).$$

Pirmiausia nagrinėsime atvejį, kai atsitiktinis dydis yra šitoks:

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{r} a_k \mathbf{1}_{E_k}(\omega);$$

čia $E_k \in \mathcal{E}$. Šiuo atveju

$$\int_E X(\omega) M(Y|\mathcal{E})(\omega) P(d\omega) = \sum_{k=1}^{r} a_k \int_{E \cap E_k} M(Y|\mathcal{E})(\omega) P(d\omega) =$$
$$= \sum_{k=1}^{r} a_k \int_{E \cap E_k} Y(\omega) P(d\omega) = \int_E \sum_{k=1}^{r} a_k \mathbf{1}_{E_k}(\omega) Y(\omega) P(d\omega) =$$
$$= \int_E X(\omega) Y(\omega) P(d\omega).$$

Vadinasi, teorema yra teisinga.

Dabar tarkime, kad X ir Y yra neneigiami atsitiktiniai dydžiai. Pažymėkime X_n nemažėjančią neneigiamų paprastųjų atsitiktinių dydžių seką, konverguojančią į X. Pasirėmę V.9.14 teorema ir ką tik įrodytu atskiru šios teoremos atveju, gauname

$$\int_E X(\omega) M(Y|\mathcal{E})(\omega) P(d\omega) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_E X_n(\omega) M(Y|\mathcal{E})(\omega) P(d\omega) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_E M(X_n Y|\mathcal{E})(\omega) P(d\omega) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_E X_n(\omega) Y(\omega) P(d\omega) = \int_E X(\omega) Y(\omega) P(d\omega) =$$
$$= \int_E M(XY|\mathcal{E})(\omega) P(d\omega).$$

Jei X ir Y yra bet kokie atsitiktiniai dydžiai, tai juos galime užrašyti šitaip: $X = X^+ - X^-$, $Y = Y^+ - Y^-$; čia X^+, X^-, Y^+, Y^- yra neneigiami atsitiktiniai dydžiai. Iš 7 teoremos žinome, kad beveik visur

$$X(\omega) M(Y|\mathcal{E})(\omega) = X^+(\omega) M(Y^+|\mathcal{E})(\omega) -$$
$$- X^+(\omega) M(Y^-|\mathcal{E})(\omega) - X^-(\omega) M(Y^+|\mathcal{E}) +$$
$$+ X^-(\omega) M(Y^-|\mathcal{E})(\omega).$$

Lieka pritaikyti ką tik įrodytą teoremos teiginį. □

Paliekame skaitytojui įrodyti toliau išvardytas sąlyginių vidurkių savybes. Jų įrodymas pagrįstas apibrėžimu ir jau įrodytomis savybėmis.

1. Jei X yra $\mathcal{E}$ integruojamas atsitiktinis dydis, tai beveik visur

$$M(X|\mathcal{E})(\omega) = X(\omega).$$

2. Jei X_1 ir X_2 yra integruojami atsitiktiniai dydžiai ir $X_1 \le X_2$, tai beveik visur

$$M(X_1|\mathcal{E})(\omega) \le M(X_2|\mathcal{E})(\omega).$$

3. Jei X yra integruojamas atsitiktinis dydis, tai beveik visur

$$|M(X|\mathcal{E})(\omega)| \le M(|X|\big|\mathcal{E})(\omega).$$

4. Jei X yra integruojamas atsitiktinis dydis, X_n $(n = 1, 2, ...)$ – nemažėjanti integruojamų atsitiktinių dydžių seka, konverguojanti į X, tai beveik visur

$$M(X_n|\mathcal{E})(\omega) \to M(X|\mathcal{E})(\omega).$$

5. Jei Y yra integruojamas atsitiktinis dydis, X_n $(n = 1, 2, ...)$ – atsitiktinių dydžių seka, konverguojanti į X, ir $|X| \le Y$, tai beveik visur

$$M(X_n|\mathcal{E})(\omega) \to M(X|\mathcal{E})(\omega).$$